

2006 年度 修士論文

銀河団における
熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の研究

上智大学大学院
理工学研究科 物理学専攻
博士前期過程 伊藤研究室

B0576017 須田 康彦

目次

第1章 序論	1
1.1 銀河団	1
1.1.1 銀河団とは	1
1.1.2 色々な波長で見る銀河団	1
1.1.3 高温の銀河団ガス	2
1.2 宇宙背景放射	8
1.2.1 宇宙背景放射の発見	8
1.2.2 宇宙背景放射の起源	8
1.2.3 宇宙背景放射の特徴	11
1.2.4 宇宙背景放射の観測	11
1.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果	16
1.3.1 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の予言	16
1.3.2 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の応用	16
1.3.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測	19
第2章 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	25
2.1 はじめに	25
2.2 非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	25
2.3 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	33
2.3.1 ボルツマン方程式の展開	33
2.3.2 展開式の解析と非相対論との比較	41
2.4 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開	47
2.5 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のフィッティング式	63
2.6 多重散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	71
2.7 まとめ	74

第 3 章 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	91
3.1 はじめに	91
3.2 非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	91
3.3 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	95
3.3.1 ボルツマン方程式	95
3.3.2 数値計算との比較	103
3.4 まとめ	104
第 4 章 まとめ	112
付 録 A 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	117
付 録 B 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	144
B.1 β_1 次の項	145
B.2 β_2 次の項	147
付 録 C 式の導出	150
C.1 ボルツマン方程式の展開	150
C.1.1 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	150
C.1.2 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果	152
C.2 (A.2) 式の導出	155
C.3 (A.8) 式の導出	156
C.4 $\overline{X}$ の導出	157

概要

宇宙の本当の姿は、どこにあるのだろうか。宇宙は、電波、可視光、X線、と、観測する波長を変化させれば、それに応じて姿を千変万化させる。そのどれもが本当の姿であって、これは宇宙空間において、様々な微視的な物理現象が複雑に絡み合っている事を意味する。そのような例の一つが銀河団である。そして銀河団の観測において、ここ10年程で非常に活発になった波長域がある。それは、従来主に行われていた、X線でも可視光でもない。そう、電波による観測が今まさに、宇宙の謎解きにおいて脚光を浴びている。

現在、宇宙は、絶対温度約 2.726 K の熱放射に包まれている。この放射は、宇宙背景放射 (Cosmic Microwave Background: CMB) と呼ばれ、現在では、WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) によって詳細に観測が行われている。

1965年にCMBが発見された事で、Sunyaev と Zeldovich は、CMB の黒体輻射スペクトルが歪められる可能性を議論した。これは、銀河団中の高温プラズマとCMB光子との逆コンプトン散乱によって、CMB光子の分布に歪みが生じるというものである。この効果を彼らにちなんで(熱的)スニャエフ・ゼルドビッチ (SZ) 効果と呼ぶ。驚くべき事に、SZ効果は、距離のパラメータを含まない。つまり原理的には、非常に遠方の銀河団であってもその距離に関係なく観測できる。また、銀河団を球形と仮定する事で、距離の推定も可能となる。これがSZ効果を観測する最大の利点である。しかし、歴史を振り返ると、SZ効果の観測が日の目を見る様になったのは、最近の事である。これは、SZ効果を観測する事の困難さを物語っている。しかし、多くの研究者の努力によって観測技術が大きく向上する事となった。その結果、90年代の半ば以降、SZ効果の観測は急速に発展し、そして現在、非常に大きな期待が集まっているのである。

観測精度の飛躍的な向上を背景に、運動学的SZ効果の詳細な観測にも期待が寄せられている。運動学的SZ効果は、銀河団の固有運動によるCMBの歪みであるが、この歪みは非常に小さい為、観測は困難を極めている。実際、運動学的SZ効果による歪みは、熱的SZ効果による歪みと比べると一桁程小さくなる事が分かっている。ここで実際の観測量は、熱的SZ効果と運動学的SZ効果の足し合わせであるので、運動学的SZ効果を正確に

評価する為には、両方の効果を正確に評価する必要がある。よって、本論文では特に、熱的 SZ 効果のより精度の高い評価に重点を置いている。また、打ち上げが間近に迫っている Planck や、まもなく完成予定である SPT(South Pole Telescope) の観測周波数域にも注目しながら、SZ 効果の解析を行っていく。

第1章 序論

1.1 銀河団

本研究テーマであるスニャエフ・ゼルドビッチ効果 [1–6] とは、宇宙背景放射の銀河団プラズマによる分布の歪みである。ではその物理過程は？そもそも宇宙背景放射とは？これらについては、順を追って説明を行っていく。まずは、本研究の舞台となる銀河団に注目しよう。

1.1.1 銀河団とは

銀河団とは、数十個からせいぜい千個程度の銀河が典型的には $4\sim 6\text{ Mpc}^1$ 程度の領域に集中しているもので、重力的に平衡状態に達している系としては、宇宙で最大規模のものと考えられている。銀河団質量は、 $10^{14}\sim 10^{15}M_{\odot}^2$ であり、主に銀河、銀河団ガス、ダークマター (暗黒物質) から成っている。それぞれの質量の割合は、銀河質量が全体の数%程度で、銀河団ガスが約 2 割、ダークマターが約 8 割という構成になっている。実際に可視光で見えている部分は、銀河団質量のほんの僅かの部分だけという事である。また、銀河団ガスがかなりの質量を占めていると言っても、その密度は、かなり小さい (10^{-3} cm^{-3} 程度)。この事実からも、銀河団の巨大さが伝わってくるものである。

1.1.2 色々な波長で見る銀河団

さて、ここでは、千変万化する銀河団の一例 (可視光、X 線で見る姿) を紹介しよう。まずは、可視光で見てみる事にする。図 1.1 は、RX J-1347.5-1145 と呼ばれる銀河団 (赤方偏移 $z=0.451$ 、約 50 億光年の距離にある) のすばる望遠鏡 (図 1.3) が映し出す姿である。光り輝く一つ一つが銀河であり、まさに銀河が群れをなし、一つの集合体として宇宙空間に存在している事がわかる。また、可視光で見ると、映し出される部分は銀河だけであって、

¹年周視差が 1 秒角となる距離が 1pc であり、約 3.26 光年となる。

² $M_{\odot}$ は、太陽質量を表し、 $1M_{\odot}$ は、約 $1.98 \times 10^{30}\text{ kg}$ である。

それ以外は何も無い空間に見える。

次に同じ銀河団を X 線で見してみる事にする。図 1.2 は、X 線天文衛星 Chandra(図 1.4) が映し出す銀河団の姿である。X 線では、もはや一つ一つの銀河の面影を見る事は出来ない。しかし、可視光では捉える事の出来なかった、中心にエネルギーが凝縮されている姿が浮かび上がっている。これは、非常に高温である銀河団ガス (典型的な銀河団では 5~15 keV 程度) の熱的な放射を捉えているのである。このように、銀河団は、捉える波長域によって異なる姿を私たちに前に現す。

また、銀河団を見る他の手段として、電波による観測が近年非常に活発に行われるようになった。これが、本研究テーマであるスニャエフ・ゼルドビッチ効果 [1-6] と密接に関係するのであるが、これに関しては、後に詳しく述べる事にする。

1.1.3 高温の銀河団ガス

銀河団の X 線観測から、高温の銀河団ガスの存在が知られている。その温度は、一般的な銀河団で 5~15 keV 程度である。また、現在見つかった最も高温の銀河団は約 17.4 KeV [7] と極めて高い。ここで、興味深い事に X 線輻射強度 S_X と SZ 効果による電波強度の変化 ΔI は、共に電子数密度 N_e と電子温度 T_e に依存するが、各パラメータの依存性が異なっている。この為、銀河団を X 線と SZ 効果の両方で観測すれば、銀河団までの距離を推定する事が出来る [8-12](距離の決定方法については、1.3 節で紹介する)。ここで、X 線輻射強度 S_X は、

$$S_X \propto RT_e^{1/2} N_e^2 \quad (1.1)$$

となる。ここで R は、視線方向における銀河団の奥行き長さである。X 線輻射強度が電子密度の 2 乗に比例するという性質を用いると、銀河団中でのガス密度の分布を推定する事が出来る。ただし、実際の銀河団は 3 次元構造を持っているのに対し、観測から得られるデータは、2 次元である。この為、銀河団の構造が球対称であるという仮定をする必要がある。高温ガスの密度分布は、 β モデル [10,13] と呼ばれる式で良く近似される。この式は、半径の関数として、

$$n(r) = n_0 \left\{ 1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}^{-\frac{3}{2}\beta} \quad (1.2)$$

となる。ここで、 n は半径 r における個数密度、 n_0 は、その中心での値 ($10^{-2} \sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ 程度)、 a はコア半径 (100~300 kpc)、 β は、 β パラメータである。また、一般に $\beta = 1$ とした場合、銀河の個数密度の分布をよく再現する事も知られている (この場合特にキング

モデル [14] と呼ばれる)。高温ガスの分布を多くの銀河団について調られた結果 $\beta = 0.6 \sim 0.7$ に近い値を示す事が知られている。つまりガス分布の方が銀河分布より平坦で、大きな半径まで広がっている事になる。

最後に幾つかの銀河団についての温度と β パラメータについて表 1.1 [15] で紹介しておく。銀河団の違いによって、温度、 β パラメータに大きな違いがない事が分かる。

銀河団	$k_B T_e (\text{keV})$	β
A2261 [16, 17]	$8.82^{+0.37}_{-0.32}$	$0.516^{+0.014}_{-0.013}$
A2390 [16, 18]	$10.13^{+1.22}_{-0.99}$	0.67
Zw3146 [16, 18]	$6.41^{+0.26}_{-0.25}$	0.74
A1835 [16, 17]	$8.21^{+0.19}_{-0.17}$	$0.595^{+0.007}_{-0.005}$
Cl0016 [17, 19]	$7.55^{+0.72}_{-0.58}$	$0.749^{+0.024}_{-0.018}$
MS0451 [17, 20]	$10.4^{+1.0}_{-0.8}$	$0.806^{+0.052}_{-0.043}$

表 1.1: 銀河団による温度、 β パラメータの違い

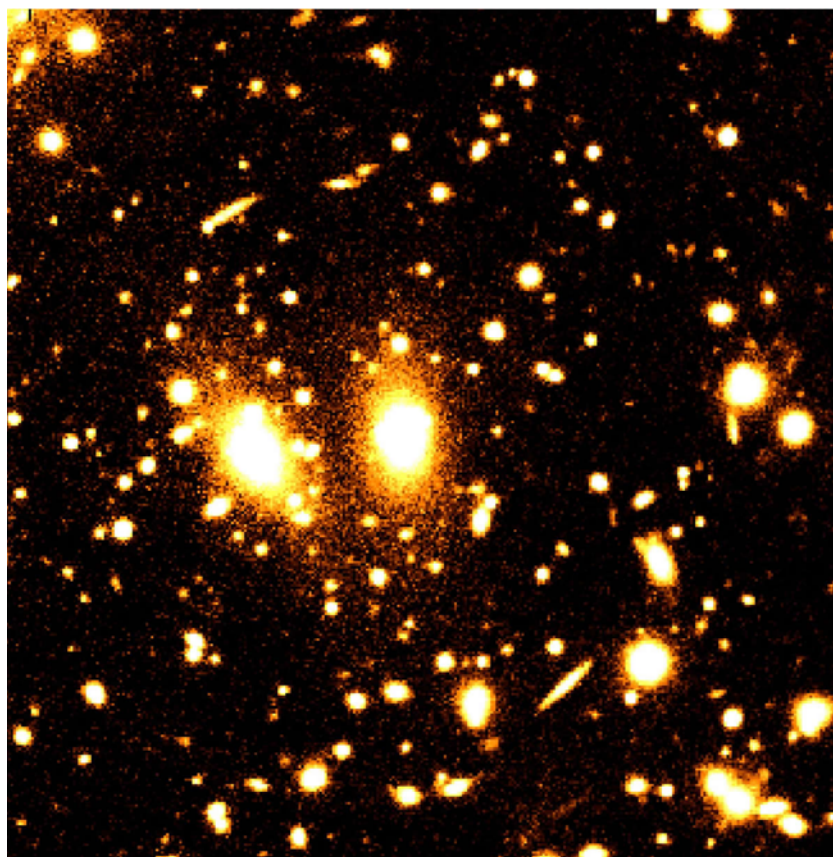


図 1.1: 銀河団 RX J1347.5-1145 のすばる可視光画像

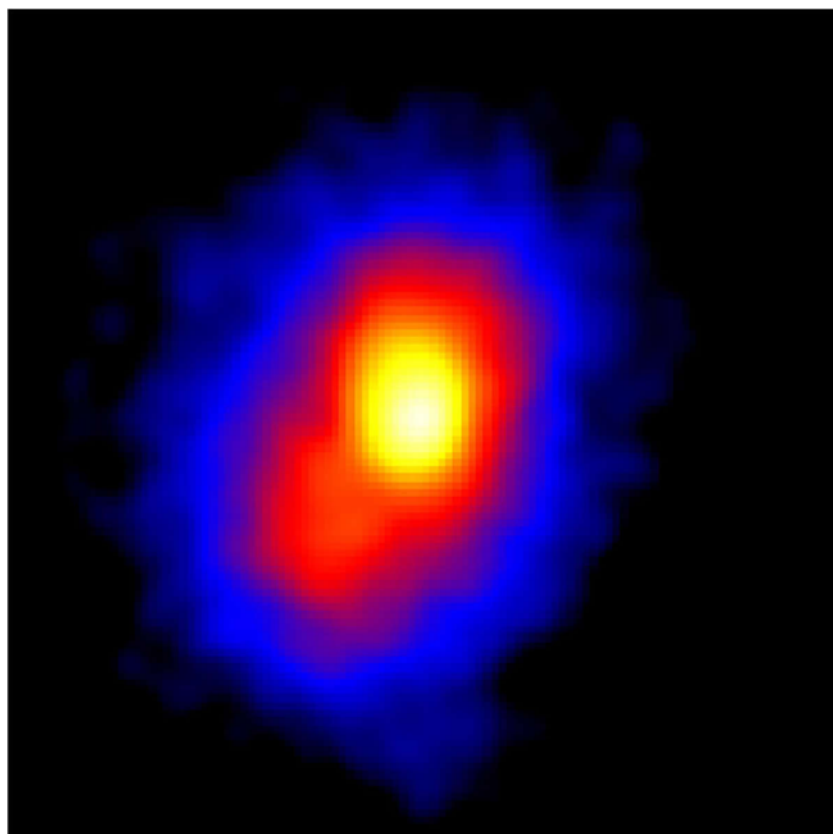


図 1.2: 銀河団 RX J1347.5-1145 の Chandra による X 線強度分布図

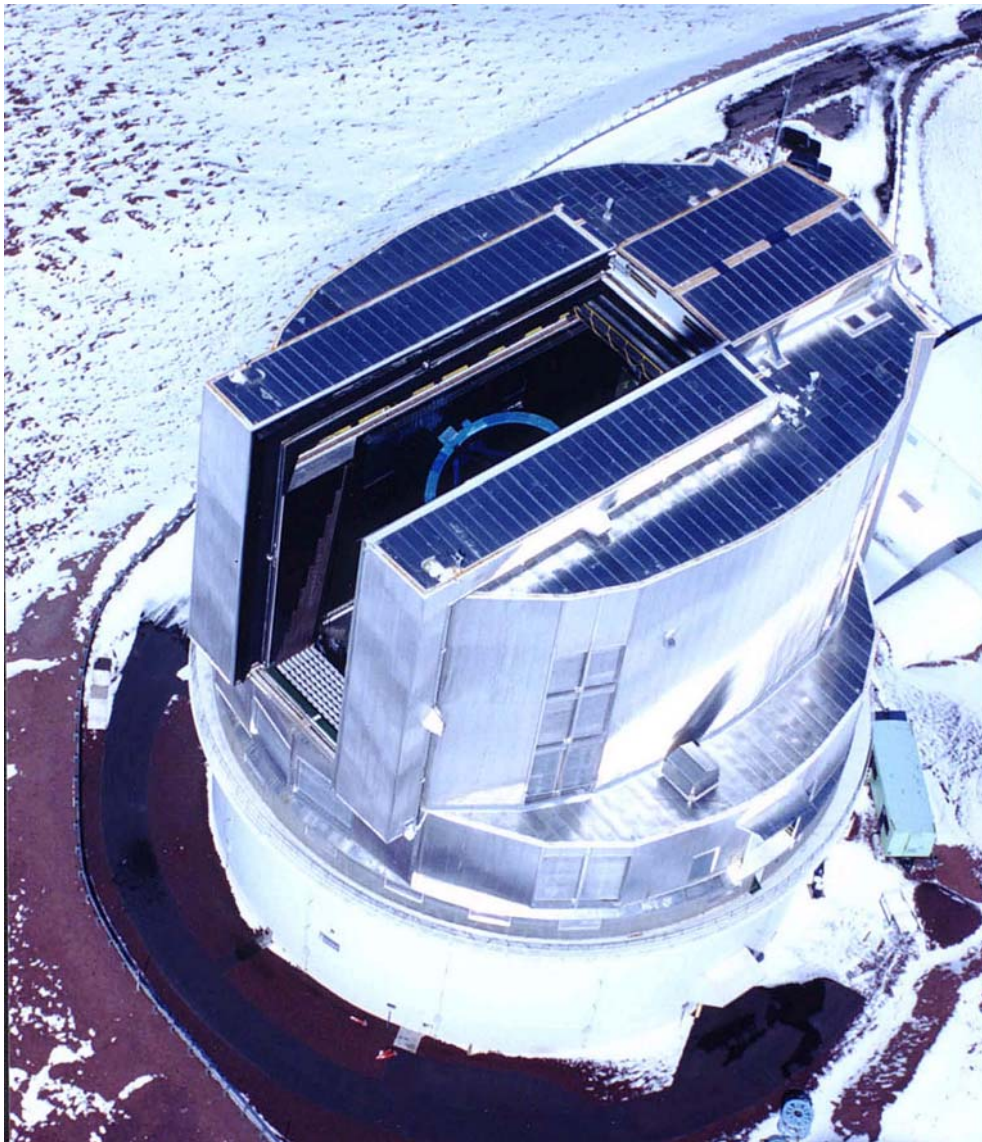


図 1.3: ハワイマウナケア山頂にある大型光学赤外線望遠鏡、すばる



図 1.4: 米国 X 線天文衛星 Chandra

1.2 宇宙背景放射

1.2.1 宇宙背景放射の発見

宇宙背景放射 (CMB) は、Gamow のビッグバン宇宙論 [21] によってその存在が予言 [22] されていた。しかし、その発見は、15 年という歳月を経てからであった。

1964 年ニュージャージー州のベル電話会社研究所の研究員であった Penzias と Wilson は、研究所にある 6 メートルのホーンリフレクタ・アンテナを空に向けていた。これは、CMB の発見ではなく、通信衛星利用の障害となる電波雑音の観測が目的であった。しかし、しばらく観測を続けているうちに、どの方向にアンテナを向けても一定以上の電波雑音が入ってくる事に彼らは気が付いた。1964 年 7 月から 1965 年 4 月まで観測を続けたところ、この電波雑音は、季節の変動とは関係なく、ある一定の強度を保っていることが明らかとなった。しかし、彼らは、このノイズ超過の原因を他に求めた。そこで、彼らは、徹底的にエラーを調べ、考えうるエラーを探しつくした。それでもなお周波数 4.08 GHz (波長約 7.35 cm) に $\Delta T = 3.5 \pm 1.0$ K [23] が残されたままであった。

これが宇宙背景放射 (CMB) の発見である。Penzias と Wilson の発見は、ビッグバン宇宙論を実験的に支持する重要な物となった。また、CMB の存在は、宇宙全体が約 3 K の熱放射で包まれている事を意味している。図 1.5 [24] が、Penzias と Wilson である。

1.2.2 宇宙背景放射の起源

宇宙背景放射はビッグバン理論の証拠であると考えられている。ビッグバン理論によると、宇宙は約 137 億年前に高温・高密度の状態から始まり、プラズマ (電離した電子とイオン) で満たされていた。これは、光学的に厚い状態であり、光は散乱され、直進出来ない。宇宙が膨張するにつれて温度が下がり、約 3000 K (赤方偏移パラメータ $z=1100$ 程度；このときの宇宙の大きさは、現在の宇宙の大きさの約 $1/1100$) まで低下すると、プラズマ中の電子は、水素の原子核である陽子に捕まり、電氣的に中性の水素原子が形成される (再結合)。これに従い、光学的深さが減少するため、光は直進できるようになる。これは、まさに霧が晴れ、視界が開く様である。その為、この過程は宇宙の晴れ上がりと呼ばれている。

宇宙の晴れ上がりが起こった当時の光は、宇宙膨張に伴い、現在では約 3 K まで冷やされている。これが現在観測されている宇宙背景放射である。宇宙背景放射は、初期宇宙の名残り火であるので、当時の情報を持っている。この為、初期宇宙の状態を知る大きな手がかりとなる。

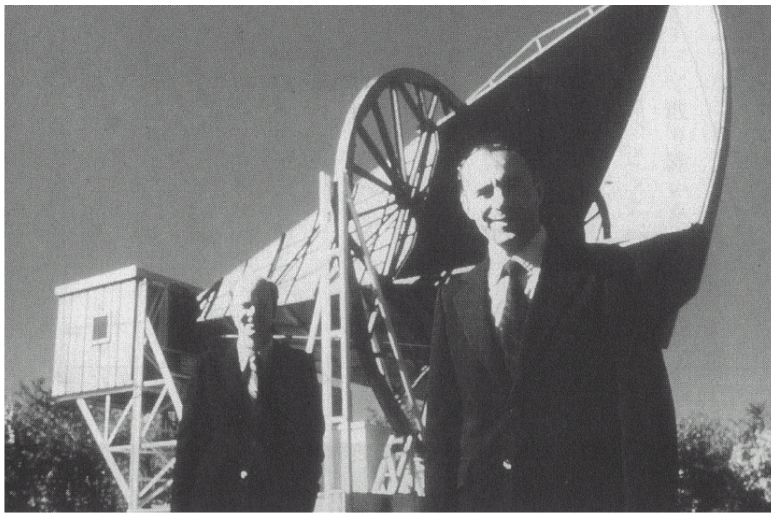


図 1.5: アルノ・ペンジアス (右) とロバート・ウィルソン (左)。背後に見えるのは彼らが宇宙背景放射の発見に用いた電波望遠鏡。宇宙背景放射を発見した業績により、彼らは、1978 年のノーベル物理学賞を受賞した。

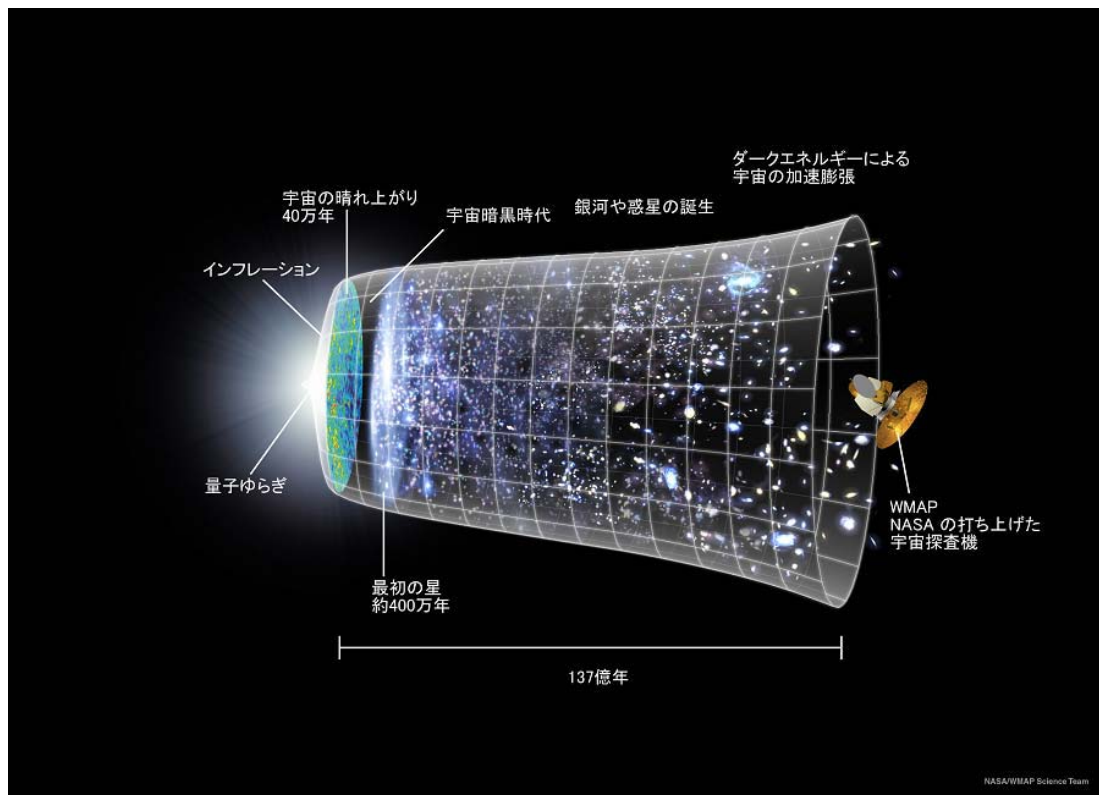


図 1.6: インフレーション期を経た宇宙膨張の概念図（2006 年の WMAP のプレスリリースより）。図の左端に時空の計量の劇的な膨張が描かれている。

1.2.3 宇宙背景放射の特徴

宇宙背景放射は、2.726 K の黒体輻射 (プランク分布) とほぼ一致しており、また、ほぼ等方的にやってきている。ここで、”ほぼ等方的”と述べた理由は、宇宙背景放射が微小な非等方性 (揺らぎ) を示していることが分かっているからである。非等方成分の中で最も大きな成分は双極成分と呼ばれる非等方成分である。その大きさを温度に換算³すると、 $3.372 \pm 0.004 \text{ mK}$ [25] であり、全方向からの宇宙背景放射の平均温度の約 10^{-3} 程度の寄与である。これは、固有運動する銀河系の中に我々観測者がいるために生じる成分である。その他には、宇宙の初期揺らぎと呼ばれる非等方成分である。その大きさを温度に換算すると、 $35 \pm 2 \mu\text{K}$ [25] であり、全方向からの宇宙背景放射の平均温度の約 10^{-5} 程度の寄与である。約数 10 分から数度のスケールで見られる非等方成分である。そして実は、これら以外にも非等方成分が存在する。それが、スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれる現象による非等方成分である。その成分は、大きく分けて大小二つの成分をもっている。大きな成分の方は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれ、その典型的な大きさを温度に換算 ((2.27) 式参照) すると、 $0.1 \sim 1 \text{ mK}$ であり、全方向からの宇宙背景放射の平均温度の $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度の寄与である。小さな成分の方は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれ、その典型的な大きさを温度に換算 ((3.8) 式参照) すると、 $0.01 \sim 0.1 \text{ mK}$ であり、全方向からの宇宙背景放射の平均温度の $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 程度の寄与である。

1.2.4 宇宙背景放射の観測

COBE(Cosmic Background Explorer)

電波観測の場合、センチ波の領域では、透明であり地上観測が比較的容易である。しかし、ミリ波・サブミリ波の領域になると、水蒸気による吸収が激しくなり、地上観測は難しくなっていく。この為、低周波数側 ($\nu < 100 \text{ GHz}$) の観測は良く行われていたが、サブミリ波の観測はまともな観測結果が得られなかった。また、CMB の温度ゆらぎの観測も各研究グループで試みられていたが、期待される温度ゆらぎが、先に述べた様に約 10^{-5} 程度と当時の地上観測からすると到底到達できる数値ではなかった。そこで、電波観測の最大の障害が大気であると考え、大気に邪魔される前に観測してしまう事が研究者の希望であっただろう。

1989 年 11 月に NASA によって COBE が打ち上げられた。COBE の目的は、宇宙背景放

³ある周波数 ν で観測された電波強度をプランク分布にフィットした時に得られる温度を輝度温度と呼ぶ。この輝度温度の差をとった値。

射の観測から宇宙の形状を理解する助けとなる測定データを得ることであった。特に CMB が全波長領域に渡って黒体放射であるか、CMB のゆらぎが存在するのかに注目が集まった。COBE の観測データから次のような結果 [26, 27] が得られている。

- 宇宙背景放射は、2.726 K の黒体放射の理論曲線とほぼ完全に一致する。
- 宇宙背景放射は空間的に 10^{-5} 程度の温度ゆらぎがある。

WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)

COBE の打ち上げにより、CMB の温度ゆらぎの存在が確認された。また、CMB は物質の情報を持っていると考えられていた為、ゆらぎの詳細な観測が期待されていた。しかし、COBE の角度分解能では、細かい部分までは観測する事が出来なかった。そこで登場する事になったのが、高い分解能 (図 1.7 がそれぞれの衛星による観測結果の違い) を持った二機目の衛星である。

2001 年 6 月に NASA によって二機目の衛星である WMAP が打ち上げられた。WMAP の目的は、高い角度分解能と感度を駆使して、宇宙背景放射の微小な揺らぎを全天にわたって観測し、宇宙の性質を記述する様々な理論の妥当性を検証することであった。WMAP の観測データ [28, 29] から次のような結果が得られている。

- 宇宙の年齢：137 億年 (正確には $13.7 \pm 0.2 \times 10^9$ Gyr) である。
- 宇宙の組成は、4.4% が通常物質、22% がダークマター、73% がダークエネルギーである。
- ハッブル定数は (71^{+4}_{-3}) km/s/Mpc である。
- WMAP のデータに現在の宇宙モデルの理論を適用すると、宇宙は平坦であり永遠に膨張を続ける。

宇宙背景放射の将来の観測

近い将来には、WMAP 以上の精度や分解能を持つ観測機による宇宙背景放射の観測実験が計画されている。近いものでは、2007 年に打ち上げ予定⁴の宇宙探査機 Planck(観測周波数域：30 – 850GHz、分解能： $> 5'$) である。また、宇宙背景放射の観測に関連して、ス

⁴当初は 2007 年に打ち上げ予定であったが、2008 年以降に延期された。

ニャエフ・ゼルドビッチ効果が、従来よりも高い精度で観測される予定である。Planck 以外にも、SPT、ACT、QUIET、APEX、AMI などが、銀河団のディープ観測を行う予定である。

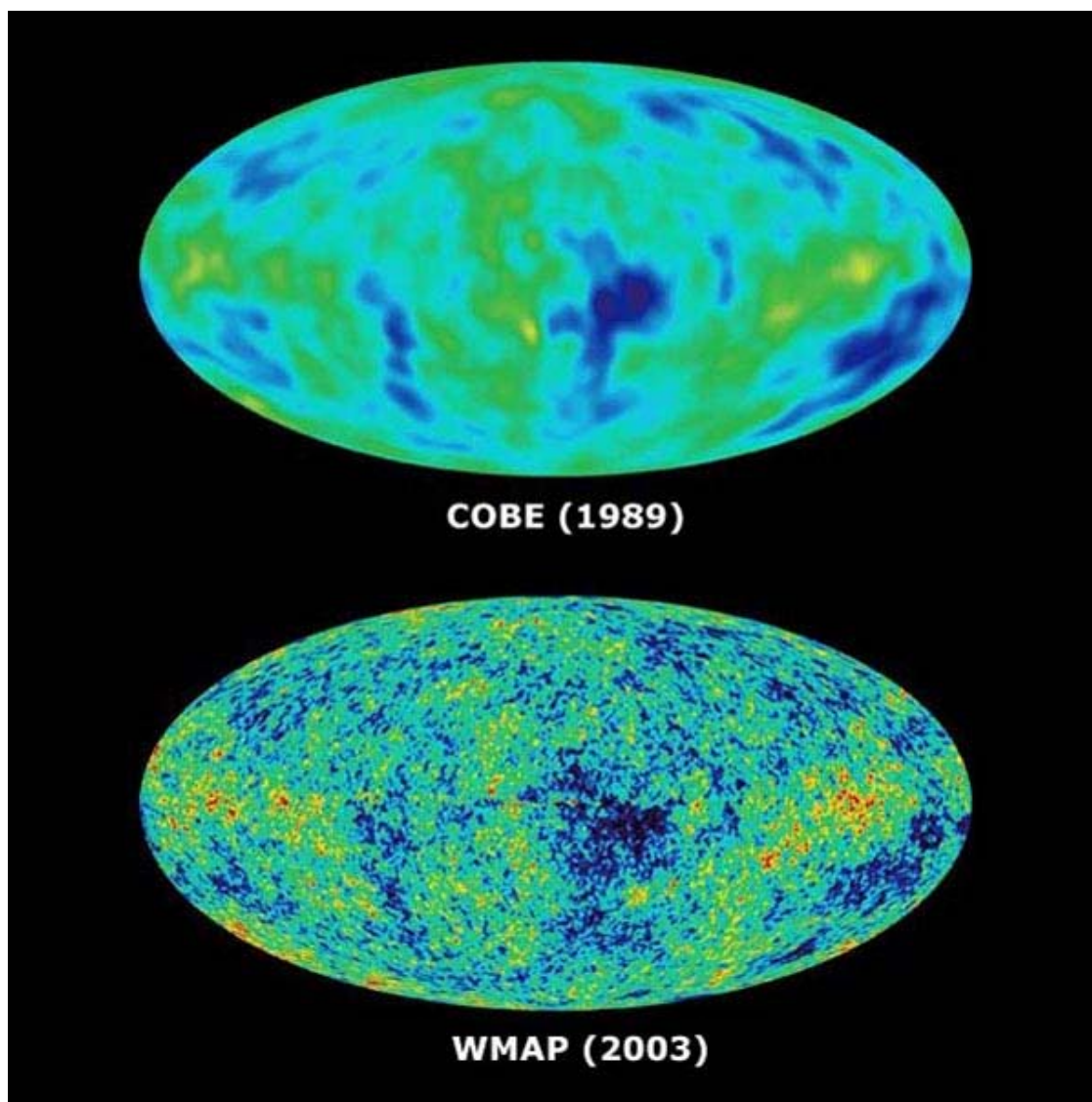


図 1.7: (上)COBE と (下)WMAP が観測した宇宙背景放射の温度の揺らぎ

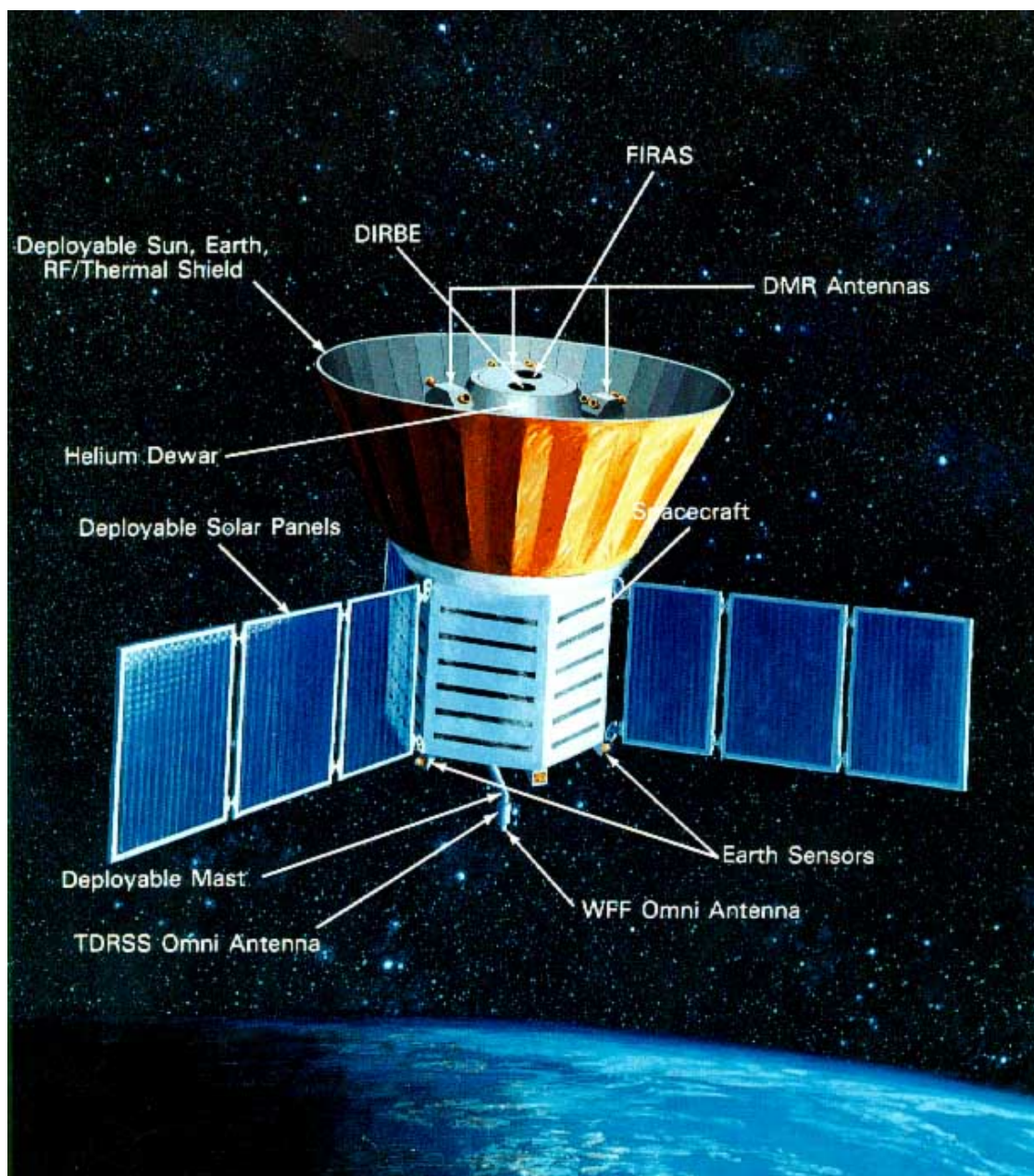


图 1.8: COBE(Cosmic Background Explorer ; 宇宙背景放射探查機)

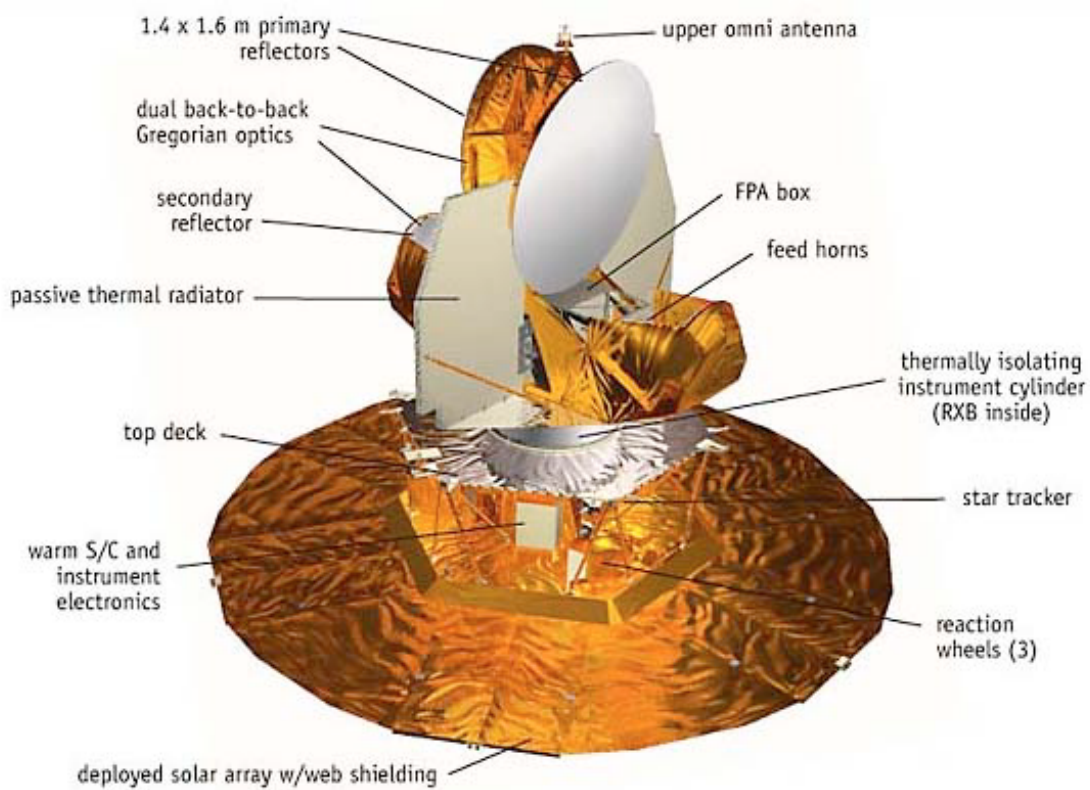


图 1.9: WMAP(Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)

1.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果

1.3.1 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の予言

ロシアの宇宙物理学者である Sunyaev と Zeldvich は、1972 年に宇宙背景放射に関して生じる宇宙物理学的現象を予言 [3] した。その予言は、宇宙のあらゆる方向からやってくる宇宙背景放射において、銀河団の方向からやってくる放射は、銀河団の無い方向からやってくる放射 (プランク分布) に対して強度が変化して見えるだろうというものであった。その原理は、銀河団内に存在する高温プラズマ中の電子と宇宙背景放射による逆コンプトン散乱が生じ、宇宙背景放射のスペクトルが高周波数側にシフトするというものである。すなわち、プランク分布に対して、低周波側であるマイクロ波領域では、宇宙背景放射のスペクトルは減少 (温度が低下) し、高周波側であるサブミリ波領域ではスペクトルが増加 (温度が上昇) するという性質を示す (図 1.10 参照)。この効果は、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれている。

一般的には、銀河団は CMB 系⁵に対して固有運動 (近傍の重力ポテンシャルによる運動) をしていると考えられる。この場合、固有運動に起因した CMB の分布の歪みも生じる。この効果は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と呼ばれている。1980 年に Sunyaev と Zeldvich によってその詳細な理論式が発表 [4] された。この効果は、銀河団の固有速度の成分のうち、観測者の方向へ向く成分 (視線方向成分) の大きさに依存して、宇宙背景放射の分布を変化させる。その速度成分が観測者側に近づく方向のときは宇宙背景放射のスペクトルが増加 (温度が上昇) し、遠ざかる方向のときはスペクトルが減少 (温度が低下) する。

1.3.2 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の応用

SZ 効果の観測から、大変興味深いことが分かる。高分解能・高感度の観測が可能であれば、SZ 効果を利用して銀河団内部の温度構造や銀河団の進化の解明につながると考えられる。X 線観測と SZ 効果の電波観測とを組み合わせることによって、重要なパラメータが推定される。一つの銀河団から得られる観測量は、スニャエフ・ゼルドビッチ効果による電波強度変化 ΔI 、X 線輻射強度 S_X 、銀河団温度 T_e 、銀河団の視差角度 θ である。これら四つの観測量から銀河団までの距離の決定が可能となる。ここで S_X は、(1.1) 式より、

$$S_X \propto RT_e^{1/2} N_e^2 \quad (1.3)$$

⁵宇宙膨張から見た系。この系では、宇宙膨張による後退速度を考えずに議論できる。

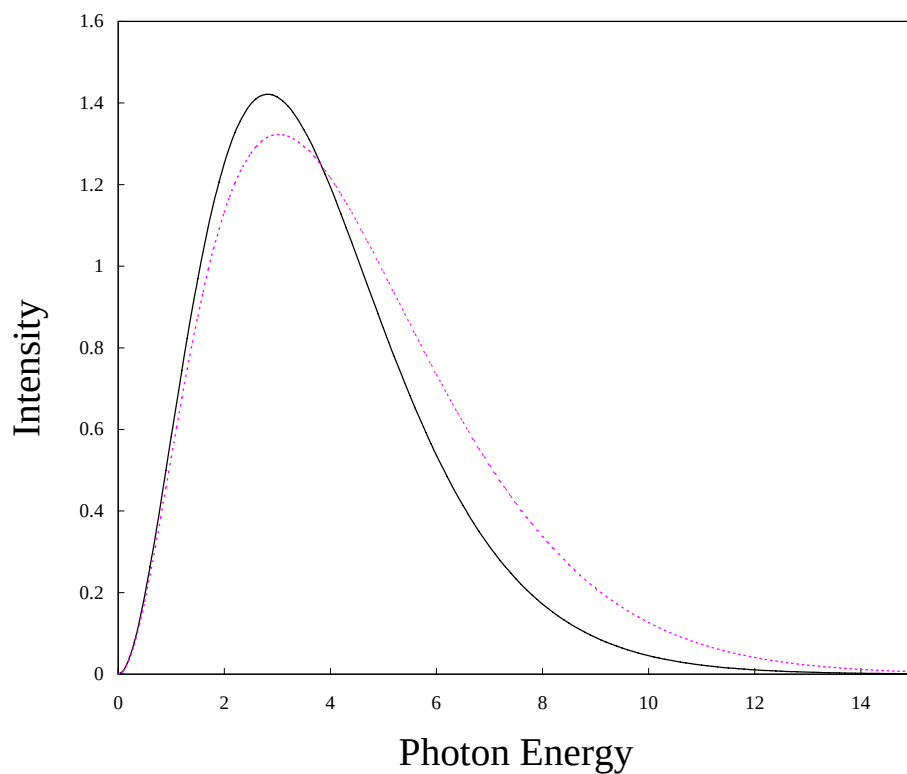


図 1.10: コンプトン散乱によるプランク分布のずれ。実線が光子の初期分布 (プランク分布)、点線が散乱後の光子の分布を表す。エネルギーの低いところで強度が減少、高い所で増加していることが分かる。これは、光子が、温度約 15 keV の電子に散乱された後のゆがみを、100 倍した図になっている。横軸は、光子のエネルギー無次元量 ($h\nu/k_B T_0$ 、 T_0 : 宇宙背景放射の温度) としている。

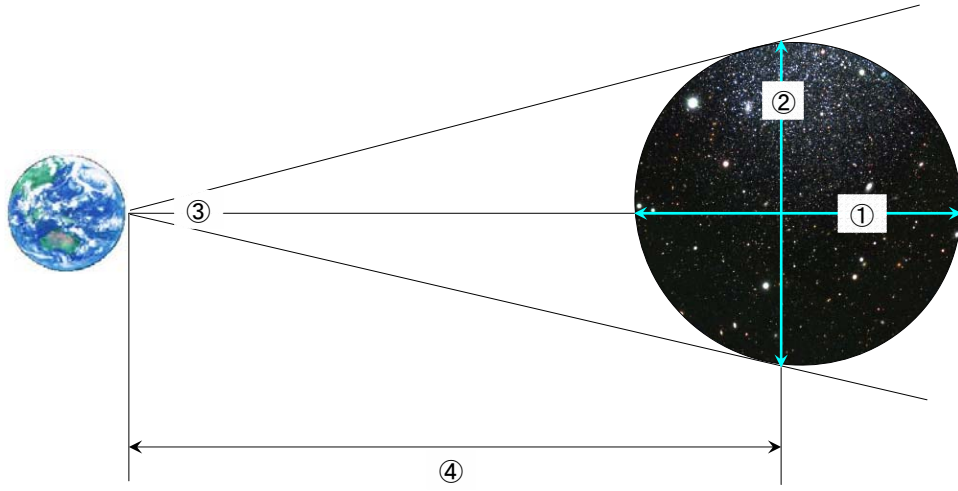


図 1.11: 銀河団の視線方向の直径から、銀河団までの距離を求める方法。1. 観測により銀河団の視線方向の直径 R が求まる。2. 銀河団を球形と仮定する事で、銀河団の幅を R とする。3. 観測により視差角度 θ を測定する、4. 銀河団までの距離 L が $L = R/\theta$ という簡単な関係式で求まる。

である。また、 ΔI は、 T_e 、 N_e 、 R に比例するので ((2.26) 式参照)

$$\Delta I \propto RT_e N_e \quad (1.4)$$

と表せる。ここで、二つの式から、観測量でない R について解くと、

$$R \propto \frac{(\Delta I)^2}{S_X T_e^{3/2}} \quad (1.5)$$

となる。この様にして、観測量を組み合わせる事で銀河団の視線方向における奥行きを決める事が出来る。奥行きの長さが決定すると、銀河団を球形と仮定する事で、視差角度から三角測量の要領で距離が決定される (図 1.11 参照)。また、距離が求まると、銀河団の赤方偏移の測定からもとめられる銀河団の後退速度を用いて、ハッブル定数を推定

できるのである [8–12]。

ここで、注目すべき事は、距離を決定する上で銀河団を球形と仮定する以外は、経験則を用いていない事である。現在、遠方の天体までの距離決定方法⁶は、全て経験則を用いている事を考えると、SZ 効果の重要性が理解できるであろう。ここで、銀河団を球形と仮定する事についてであるが、一つ一つの銀河団では、誤差が大きく出てしまう可能性が高い。しかし、一般的に球形を取る事の妥当性を考えると、サンプル数を増やす事が出来れば、球形と仮定する事による誤差は小さくなるはずである。よって、ハッブル定数の決定の際には、サンプル数を増やす事で、正確な値を求める事が期待できる。

また、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の検出ができれば、銀河団の固有速度の視線方向成分を特定することができる。これを用いれば、近傍の重力ポテンシャルの推定が可能となる。これを、多くの銀河団について行うことができれば、銀河団の固有速度マップを得る事ができる。これは、宇宙の構造形成についての解明をする上で、重要な手がかりになると考えられる。さらに、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の信号は、赤方偏移パラメータに依存しないため、遠方銀河団の観測に有利であるという利点を持っている。

1.3.3 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測

スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測は、先に述べたような大きな利点を持っている。しかし、歴史を振り返ると SZ 効果の観測が日の目を見る様になったのは、最近の事である。これは、SZ 効果を観測する事の難しさを物語っている。この難しさ故、可視光・X 線データと比べると角度分解能や感度が劣ってしまう。スニャエフ・ゼルドビッチ効果の信号は弱く広がっている為、元々、高い空間分解能を求めて設計されている電波干渉計では、観測が難しかったのである。そこで、シカゴ大学の Carlstrom らのグループは、視野を広げる為に分解能を落とすという工夫を施した。この方法を用いる事で、彼らはこれまでの壁を打ち破る事に成功した。これが 90 年代の半ばの事である。これ以降、銀河団の SZ マップ (図 1.12 参照) [12] が活発に作られるようになっていく。この図は、30 GHz で作られたものであるが、低周波数側で観測が行われているので、中心に行くほど高温であるため負の信号が強くなっている。現在、このような観測を行っている観測機の一つが The Sunyaev-Zel'dovich Array (SZA)(図 1.13) である。現在では、このようにノイズが少ない低周波数側での観測が多く行われている。

⁶セファイド型変光星や Ia 型超新星を利用して求める方法等。理論的裏づけのある方法は、年周視差から求める方法のみであるが、極近傍までしか測る事ができない。

いくつかの周波数での観測を組み合わせる事で、熱的效果と運動学的効果の成分を分けようとする試み(図 1.14) [15] も行われている。この図のように固有速度の決定を試みてはいるものの、誤差が数百%もあるというのが現状である。しかし、新しい観測機器の完成が迫りつつあり、この固有速度の決定にも期待が集まっている。完成が迫っている、South Pole Telescope(SPT)(図 1.15 参照) の観測周波数が、90, 150, 220, 270 GHz である事に注目し、この周波数での理論の精度なども本文の中で評価を行っていく。

最後に現在計画・実行されている SZ 観測を表 [30] にしてまとめておく。

名前	開始年	場所	ウェブサイト
干渉計			
AMI(Arcminute Microkelvin Imager)	2004	Cambridge	1
SZA(SZ Array)	2004	California	2
ALMA(Atacama Large Millimeter Array)	2007	Atacama	3
ボロメータアレイ			
APEX-SZ(ALMA Pathfinder Experiment SZ)	2004	Atacama	4
ACT(Atacama Cosmology Telescope)	2006	Atacama	5
SPT(South Pole Telescope)	2007	南極	6
衛星			
PLANCK	2008	L2	7

表 1.2: SZ 観測計画

1. <http://www.mrao.cam.ac.uk/telescopes/ami/>
2. <http://astoro.uchicago.edu/sza/>
3. <http://www/nro.nao.ac.jp/~lmsa/>
4. <http://bolo.berkeley.edu/apexsz/>
5. <http://www.hep.upenn.edu/~angelica/act/>
6. <http://astro.uchicago.edu/spt/>
7. <http://astro.estec.esa.nl/Planck/>

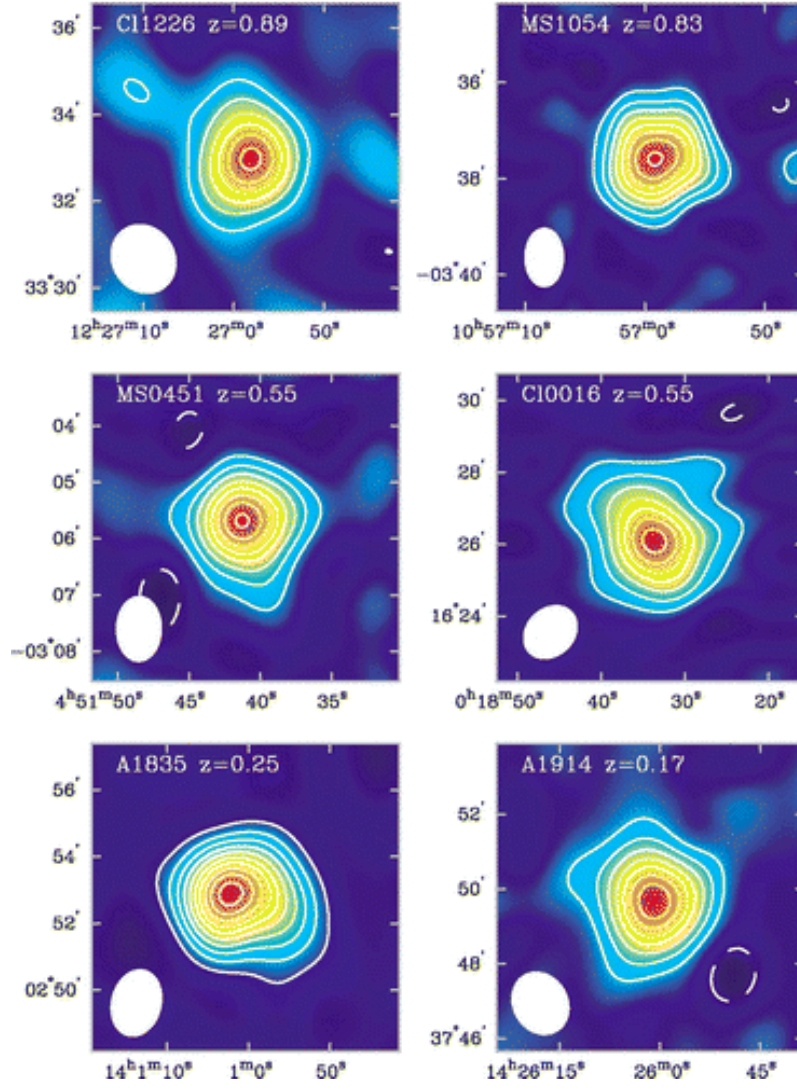
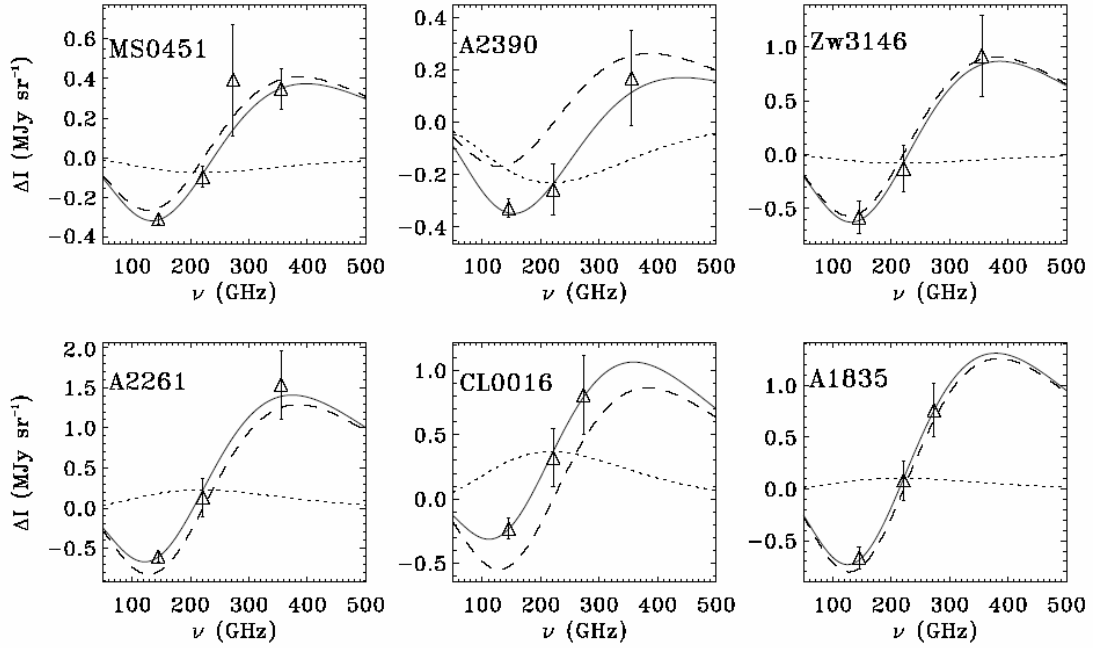


図 1.12: 30 GHz における SZ 強度分布図。The Owens Valley Radio Observatory and the Berkeley-Illinois-Maryland Association Array



图 1.13: The Sunyaev-Zel'dovich Array (SZA)



MS0451

$$v = +800^{+1525}_{-1125} \text{ km s}^{-1}$$

A2390

$$v = +1900^{+6225}_{-2650} \text{ km s}^{-1}$$

Zw3146

$$v = -400^{+3700}_{-1925} \text{ km s}^{-1}$$

A2261

$$v = -1575^{+1500}_{-975} \text{ km s}^{-1}$$

CL0016

$$v = -4100^{+2650}_{-1625} \text{ km s}^{-1}$$

A1835

$$v = -175^{+1675}_{-1275} \text{ km s}^{-1}$$

図 1.14: 複数の周波数での観測を組み合わせる事で、銀河団の固有速度を決定しようとする試み。



图 1.15: SOUTH POLE TELESCOPE at Amundsen-Scott South Pole Station

第2章 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

2.1 はじめに

さてこの章では、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な解析を述べていく。元々、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の理論式は、Sunyaev & Zeldovich [3] によって電子の運動が非相対論的であるという近似の上で導き出された。その後、観測精度が向上した事によって、高温の銀河団が次々と見つかった。例えば、1998 年に Tucker et al. [7] が電子温度約 17.4 keV という非常に高温の銀河団を発見した。この様な条件の下では、電子の運動が非相対論的であるという近似がもはや成り立たなくなる。そこで Rephaeli [31] は、輻射輸送理論の方法を用いて相対論的補正を計算する、先駆的な研究を行った。これに対して、伊藤、神山、野澤 [32] や Challinor & Lasenby [33] は、光子の時間発展の方程式を用いて相対論的補正の計算を行った。特に、伊藤らは、厳密数値積分及び展開式の両方を求めている。ここでは、伊藤らによって用いられた方法での導出を行っていく。

また前章で触れたように、近い将来精度の高いスニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測が可能になる。これにより今まで困難であった運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果 (詳しくは次の章で述べる) のより詳細な観測も行われる予定である。実際の観測では、この二つの効果の足し合わせが観測される。つまり、運動学的効果を評価する為には、熱的效果のより精度の高い解析が必要になる。そこで、この章では、熱的效果をより高い精度で評価する事に着目している。

2.2 非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

ここでは、非相対論的な熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を Kompaneets 近似 [34] を用いて導出する。ここで銀河団プラズマが希薄な為、光子が受ける散乱が 1 回のみと考え、また銀河団中のプラズマは、等温球対称であると仮定する。この仮定の下では、光子の分布関数 $n(\omega)$ に対する時間発展の方程式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \int d\tau \int [n(\omega) (1 + n(\omega')) f(E)$$

$$- n(\omega') (1 + n(\omega)) f(E + \hbar\omega - \hbar\omega') dW \quad (2.1)$$

と書き下す事ができる。ここで、 $d\tau$ は電子の位相空間要素、 $f(E)$ は電子の分布関数、 dW はある一つの状態から別の状態への微分遷移確率 (Differential Probability of Transition; $cd\sigma$ 、 c :光速、 $d\sigma = (d\sigma/d\Omega)d\Omega$ 、 $(d\sigma/d\Omega)$:微分散乱断面積)、プライムがついているものは全て散乱後の終状態を表す。この方程式は、角振動数 ω で入射した光子が ω' に散乱される確率から、 ω' で入射した光子が ω に散乱される確率を引いたものとなっている。

ここで、電子の分布関数 $f(E)$ はボルツマン分布 ($f(E) = Ae^{-E/k_B T_e}$ 、 T_e は電子温度) とする。また、 $\omega' - \omega = \Delta\omega$ とおき、(2.1) 式に代入して、計算していく。まず、

$$\begin{aligned} E' &\equiv E + \hbar\omega - \hbar\omega' \\ &= E - \hbar\Delta\omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

とする。また、光子のエネルギーを電子のエネルギーで割ったものを

$$x \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_e} \quad (2.3)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} f(E') &= f(E - \hbar\Delta\omega) \\ &\approx f(E) \left(1 + \Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} n(\hbar\omega') &= n(\hbar\omega + \hbar\Delta\omega) \\ &\approx n(\hbar\omega) + \frac{\partial n}{\partial(\hbar\omega)} \hbar\Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial(\hbar\omega)^2} (\hbar\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n(\hbar\omega) + \frac{\partial n}{\partial(\hbar\omega)} \frac{k_B T_e}{k_B T_e} \hbar\Delta\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial(\hbar\omega)^2} \frac{(k_B T_e)^2}{(k_B T_e)^2} (\hbar\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

となり、(2.4) 式、(2.5) 式を (2.1) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \frac{\hbar}{k_B T_e} \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_B T_e} \right)^2 \hbar^2 \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。ここで、上式の右辺第2項の積分は簡単に解くことが出来るので、まずそちらから考えていく。いま

$$I \equiv \hbar^2 \int d\tau \int dW f(E) \Delta\omega^2 \quad (2.7)$$

とおく。まず、運動量保存則とエネルギー保存則を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega}{c} \mathbf{n} + \mathbf{p} &= \frac{\hbar\omega'}{c} \mathbf{n}' + \mathbf{p}' \\ \hbar\omega + \frac{p^2}{2m} &= \hbar\omega' + \frac{p'^2}{2m} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ここで、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{p}'$ はそれぞれ散乱前後の電子の運動量、 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{n}'$ はそれぞれ散乱前後の光子の伝播方向を表す。(2.8) から、 $\mathbf{p}'$ を消去する。ここで $\omega' = \omega + \Delta\omega$ を導入し、また (2.7) 式には $\Delta\omega$ の二乗の項が入っているので、 $\Delta\omega$ が十分小さいとして、ここでは一次の項のみを考える。すると、(2.8) 式より、

$$\hbar\Delta\omega = -\frac{\hbar\omega c \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}') + (\hbar\omega)^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')}{mc^2 [1 + (\hbar\omega/mc^2)(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}'/mc]} \quad (2.9)$$

となる。ここでは、 $k_B T_e$ 、 $\hbar\omega$ 共に、電子の静止エネルギー mc^2 よりも十分に小さいとすると

$$\begin{aligned} \hbar\Delta\omega &\approx -\frac{\hbar\omega c \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}') + (\hbar\omega)^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')}{mc^2} \\ &\approx -\frac{\hbar\omega \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}')}{mc} \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。これを (2.7) 式に代入すると、

$$I = \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int d\tau \int dW [\mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{n}')]^2 f(E) \quad (2.11)$$

となる。これを $\mathbf{p}$ の全ての方向に対して平均すると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int p^2 f(E) d\tau \int |\mathbf{n} - \mathbf{n}'|^2 dW \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{mc}\right)^2 \int 4\pi p^2 dp f(E) p^2 \int |\mathbf{n} - \mathbf{n}'|^2 dW \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。はじめの積分は、ちょうど $\langle p^2 \rangle$ に電子の数密度 N_e をかけた形、また、電子の運動エネルギーの $2m$ 倍である。 $f(E)$ はボルツマン分布であるので、 $3mk_B T_e N_e$ となる。次に (2.12) 式の後ろの積分を考える。今、コンプトン散乱断面積をトムソン散乱断面積によっ

て近似する。トムソン散乱断面積は前方散乱と後方散乱に対して対称であるので、全散乱方向 θ から $(\pi - \theta)$ までで積分すると、

$$\int \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' dW = 0 \quad (2.13)$$

となり、また、トムソン散乱断面積はエネルギーによらないので、結果として、

$$I = 2(\hbar\omega)^2 \left(\frac{k_B T_e}{mc^2} \right) \frac{c}{l} \quad (2.14)$$

となる。ここで、 $dW = cd\sigma$ を使った。また、 l は平均自由行程を表し、 $l = 1/\sigma_T N_e$ で前断面積 $\sigma_T = (8\pi/3)(e^2/mc^2)^2$ と電子の数密度 N_e より決定できる。

さて、次に光子の数は散乱前後で変化しないことを考え、粒子数の保存、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -x^{-2} \frac{\partial(x^2 j)}{\partial x} \quad (2.15)$$

を考える。ここで、 x は $\hbar\omega/k_B T_e$ を表し、 j は波数空間における、“流れ (flow)”を表す。さて、(2.6) 式と (2.15) 式は同じものを表しているので、これらを比較する。(2.6) 式は、 x を係数に含まない二階導関数 d^2n/dx^2 を持ち、 $n = (e^x - 1)^{-1}$ の時、 $\partial n/\partial x = -n(1 + n)$ となり、第一項が 0 にならなくてははいけない。すなわち、 j は少なくとも、

$$j = g(x) \left[\frac{\partial n}{\partial t} + n(1 + n) \right] \quad (2.16)$$

という形をしていなくてはならないことが分かる。次に、 $g(x)$ を決定する必要がある。(2.16) 式を (2.15) 式に代入して、 d^2n/dx^2 の係数を比較する。(2.14) 式より、 I は二階導関数の係数として x^2 を持つ事が分かるので、 $g(x) = -x^2$ となる。以上より、粒子数保存の式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_e}{mc^2} \frac{c}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \quad (2.17)$$

となる。

さて、ここで宇宙背景放射について考えているので、 n にプランク分布

$$n_0 = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T_0} - 1} = \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.18)$$

を代入する。ここで、 $X \equiv \hbar\omega/k_B T_0$ 、 T_0 は宇宙背景放射の温度 (2.726 K) を表す。さて、この X を用いて x を書き直すと、

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T_e} = \frac{T_0}{T_e} X \quad (2.19)$$

となる。これを用いて、(2.17) 式を書き直す。係数は省略して、

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \\ &= \frac{4T_0}{T_e} X \left(\frac{T_e}{T_0} \frac{\partial n}{\partial X} + n + n^2 \right) + \frac{T_0}{T_e} X^2 \left(\frac{T_e}{T_0} \frac{\partial^2 n}{\partial X^2} + \frac{\partial n}{\partial X} + 2n \frac{\partial n}{\partial X} \right)\end{aligned}\quad (2.20)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial X} &= -e^X n^2 \\ \frac{\partial^2 n}{\partial X^2} &= e^X (e^X + 1) n^3\end{aligned}\quad (2.21)$$

より、(2.20) 式は、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{4T_0}{T_e} \frac{Xe^X}{(e^X - 1)^2} \left[1 - \frac{T_e}{T_0} \right] + \frac{T_0}{T_e} \frac{X^2 e^X}{(e^X - 1)^2} \left[\frac{T_e}{T_0} \frac{e^X + 1}{e^X - 1} - \frac{e^X + 1}{e^X - 1} \right]\quad (2.22)$$

となる。今は銀河団中の電子を考えているので、 $T_0 \ll T_e$ とすると、

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{Xe^X}{(e^X - 1)^2} \left[\frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right]\quad (2.23)$$

となり、係数を付けて表すと、

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{k_B T_e c}{mc^2 l} \frac{Xe^X}{(e^X - 1)^2} \left[\frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right]\quad (2.24)$$

となる。さて、実際に観測されるのは、銀河団を通過した後の宇宙背景放射の歪みであるので、光子の通過してくる時間で積分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\Delta n}{n_0} &= \int \frac{1}{n_0} \frac{\partial n}{\partial t} dt \\ &= \frac{k_B T_e}{mc^2} \frac{Xe^X}{(e^X - 1)^2} \left[\frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right] \int \sigma_T N_e dl \\ &= \theta_e \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \left[\frac{e^X + 1}{e^X - 1} X - 4 \right]\end{aligned}\quad (2.25)$$

となる。ここで、 n_0 はプランク分布を表し、また、 $\tau = \int \sigma_T N_e dl$ 、 $\theta_e = k_B T_e / mc^2$ とした。 τ は光学的深さを表す。これが、非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表す式である。また、一般的な銀河団のパラメータである、電子数密度 $N_e \sim 10^{-3} \text{cm}^{-3}$ 、銀河団の直径 $L \sim 1 \text{Mpc}$ を、銀河団が球対称・等密度であると仮定して代入すると、 τ は、 $O(10^{-2})$ であることが分かる。また実際に観測される強度変化として、プランクの黒体放射の式より、

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n}{n_0}\quad (2.26)$$

と定義する。このグラフを描くと、図 2.1 の様になる。グラフを見れば分かるように、低エネルギー側では強度が減少し、高エネルギー側では強度が増加する。また、強度変化の大きさは、電子温度に比例する事が分かる。これが熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果である。

さて、1 章で、スニャエフ・ゼルドビッチ効果は距離を求める理論であると説明した。(2.25) 式において、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のパラメータは、 T_e 、 X 、 $\tau(N_e, l)$ であり、 X は、波長領域を観測者が決定する事により任意に決まる。 T_e 、 N_e については、X 線観測と組み合わせる事により決定でき、実際の未知数である、銀河団の直径が求まるのである。よって第 1 章で述べたように、この効果の観測により、銀河団までの距離を求める事ができるのである。

相対的な分布変化 $\Delta n/n_0$ に対して $X \rightarrow 0$ の極限をとる事で相対的な温度変化を得る事が出来る。ここで、簡単のため銀河団の一般的な値 $T_e = 10^8$ K、 $\tau = 0.01$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T_0} &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{n_0} \rightarrow -\frac{2k_B T_e}{mc^2} \tau \\ &\approx O(10^{-3}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

となり、 $T_0 = 2.726$ K に対して、mK のオーダーで歪む事がわかる。実際の観測でも、この程度のオーダーの歪みが観測されている。表 2.1 [35] は、いくつかの銀河団に関して、実際の観測結果として得られた値である。また、参考の為に中心から 2500 kpc 以内における銀河団ガス質量、全質量を載せてある。

Cluster	ΔT_0 (mK)	$M_{gas}(r_{2500})$ ($10^{13} M_\odot$)	$M_{total}(r_{2500})$ ($10^{14} M_\odot$)
CL0016	$-1.449^{+0.088}_{-0.094}$	$4.65^{+0.42}_{-0.39}$	$2.83^{+0.32}_{-0.32}$
A267	$-0.735^{+0.084}_{-0.099}$	$2.74^{+0.68}_{-0.57}$	$1.99^{+0.25}_{-0.23}$
A370	$-1.072^{+0.144}_{-0.244}$	$2.58^{+0.47}_{-0.40}$	$3.18^{+0.22}_{-0.22}$
MS0451	$-1.610^{+0.100}_{-0.112}$	$5.03^{+0.83}_{-0.71}$	$3.46^{+0.32}_{-0.31}$
MC0647	$-1.390^{+0.151}_{-0.242}$	$2.81^{+0.72}_{-0.57}$	$6.21^{+0.86}_{-0.74}$
A 665	$-0.801^{+0.083}_{-0.105}$	$2.43^{+0.71}_{-0.53}$	$2.77^{+0.21}_{-0.29}$
A773	$-0.985^{+0.109}_{-0.128}$	$2.56^{+0.67}_{-0.54}$	$3.12^{+0.23}_{-0.22}$
Zw3146	$-1.223^{+0.177}_{-0.242}$	$3.95^{+0.83}_{-0.73}$	$3.43^{+0.17}_{-0.19}$
MS1054	$-1.483^{+0.191}_{-0.253}$	$1.17^{+0.16}_{-0.15}$	$0.62^{+0.21}_{-0.16}$
MS1137	$-1.021^{+0.301}_{-0.441}$	$2.09^{+0.38}_{-0.36}$	$0.96^{+0.15}_{-0.14}$
MC1149	$-1.181^{+0.127}_{-0.160}$	$3.00^{+0.42}_{-0.37}$	$2.17^{+0.55}_{-0.53}$
CL1226	$-2.171^{+0.677}_{-1.164}$	$2.82^{+0.63}_{-0.51}$	$5.08^{+1.05}_{-0.88}$
A1689	$-1.749^{+0.171}_{-0.213}$	$3.57^{+0.69}_{-0.57}$	$5.21^{+0.23}_{-0.23}$
R1347	$-2.235^{+0.316}_{-0.429}$	$5.88^{+0.92}_{-0.85}$	$8.35^{+0.56}_{-0.56}$
A1835	$-1.590^{+0.112}_{-0.113}$	$6.20^{+0.93}_{-0.82}$	$5.38^{+0.34}_{-0.31}$
A1914	$-1.776^{+0.200}_{-0.317}$	$4.33^{+0.96}_{-0.75}$	$4.69^{+0.18}_{-0.16}$
A1995	$-1.051^{+0.062}_{-0.063}$	$4.49^{+0.63}_{-0.57}$	$3.63^{+0.22}_{-0.21}$
A2163	$-1.898^{+0.276}_{-0.336}$	$7.57^{+1.61}_{-1.38}$	$6.17^{+0.38}_{-0.44}$
A2204	$-1.938^{+0.296}_{-0.382}$	$8.96^{+2.57}_{-2.13}$	$4.95^{+0.46}_{-0.41}$
A2218	$-1.059^{+0.143}_{-0.176}$	$5.34^{+1.23}_{-1.03}$	$2.95^{+0.21}_{-0.20}$
A2261	$-1.179^{+0.148}_{-0.239}$	$2.46^{+0.75}_{-0.54}$	$2.91^{+0.27}_{-0.23}$
MC2214	$-1.518^{+0.160}_{-0.227}$	$4.37^{+0.60}_{-0.55}$	$3.87^{+0.41}_{-0.38}$
MC2214	$-1.315^{+0.137}_{-0.164}$	$3.91^{+0.65}_{-0.56}$	$2.15^{+0.40}_{-0.43}$

表 2.1: 各々の銀河団における熱的 SZ 効果による温度変化

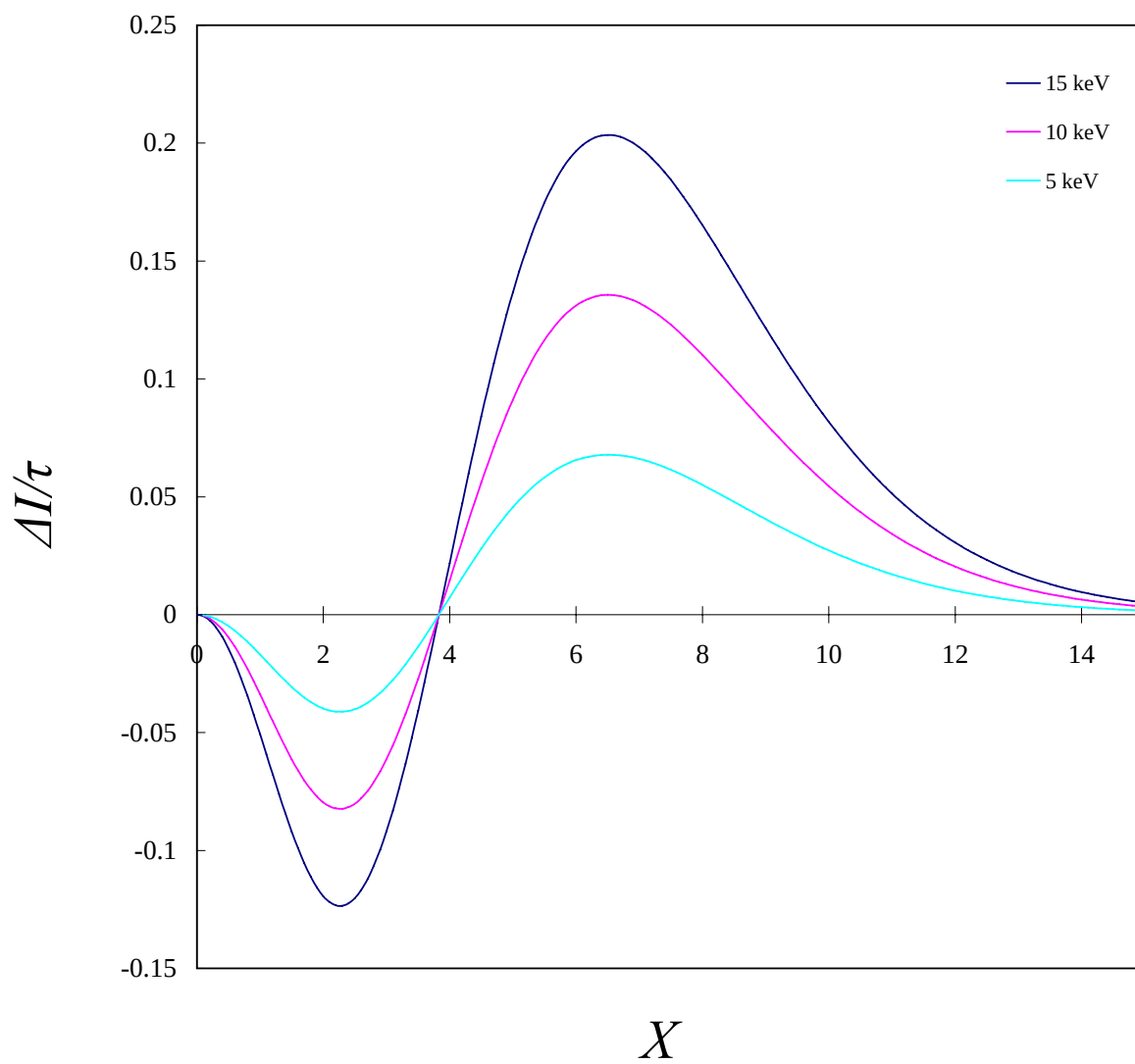


図 2.1: 非相対論的な熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の強度変化を表すグラフ。電子の温度はそれぞれ $T_e = 5, 10, 15$ keV の場合

2.3 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

2.3.1 ボルツマン方程式の展開

さて、ここからは相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の導出を行う。ここからは、光子の分布関数に対するボルツマン方程式の計算を行う訳であるが、積分計算に関して数値計算、展開計算の二通りの方法で行っている。もちろん、数値計算を行えば正確な値を得る事が出来る。ここで展開計算を行う理由は、数値計算が多重積分を行う必要がある為、計算に時間が掛かってしまうからである。実際の観測量を解析する時に、時間が掛かってしまうようでは、非常に不便である。そこで、値を代入する事で直ちに答えが返ってくる展開式を求める事で、より効率的に解析が行う事ができる。また、展開式の精度を確認するために、代表的な値で数値計算との比較を行っている。また、本文中では、主に展開計算を中心に導出を行う。

銀河団中の電子は非常に希薄 ($\sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) であり、光学的に薄いので、光子は銀河団中の電子によって一度のみ散乱されると考える。また、銀河団中の電子は、等温・球対称に分布すると仮定する。これを元に、コンプトン散乱過程を考えてゆく。

さて、銀河団の中心に座標系の原点を置き、光子の分布関数 $n(\omega)$ に対する時間発展方程式 (ボルツマン方程式) を書き下すと、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{ n(\omega)[1 + n(\omega')]f(E) - n(\omega')[1 + n(\omega)]f(E') \} \quad (2.28)$$

$$W = \frac{(e^2/4\pi)^2 \bar{X} \delta^4(p + k - p' - k')}{2\omega\omega'EE'} \quad (2.29)$$

$$\bar{X} = -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + 4m^4 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)^2 - 4m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) \quad (2.30)$$

$$\kappa = -2(p \cdot k) = -2\omega E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha\right) \quad (2.31)$$

$$\kappa' = 2(p \cdot k') = 2\omega' E \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{E} \cos \alpha'\right) \quad (2.32)$$

となる。この方程式は、周波数 ω で入射した光子が ω' に散乱される光子から、 ω' で入射した光子が ω に散乱される光子を引いたものになっている。ここで、 W は、コンプトン散乱の遷移確率を表す。また、電子及び光子の初期状態の 4 元運動量をそれぞれ、 $p = (E, \mathbf{p})$ 、

$k = (\omega, \mathbf{k})$ とし、終状態の 4 元運動量をそれぞれ、 $p' = (E', \mathbf{p}')$ 、 $k' = (\omega', \mathbf{k}')$ とする。角度 α 、 α' はそれぞれ、 $\mathbf{p}$ 、 $\mathbf{k}$ の間及び、 $\mathbf{p}'$ 、 $\mathbf{k}'$ のなす角を表す。また、ここでは $\hbar = c = 1$ の自然単位系で考えていく。

次に、銀河団中の電子は、高温である為、フェルミ分布関数を相対論的マクスウェル分布と見なす事ができる。すなわち、電子が温度 T_e を持つとすると、エネルギー E の時の電子の分布 $f(E)$ は

$$\begin{aligned} f(E) &= \left(e^{[(E-m)-(\mu-m)]/k_B T_e} + 1 \right)^{-1} \\ &\approx e^{-[K-(\mu-m)]/k_B T_e} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。ここで、 $K \equiv (E - m)$ とした。さて、ここで光子のエネルギー無次元量

$$x \equiv \frac{\omega}{k_B T_e} \quad (2.34)$$

$$\Delta x \equiv \frac{\omega' - \omega}{k_B T_e} \quad (2.35)$$

を定義し、(2.33)～(2.35) 式までを (2.28) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \left\{ n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \right\} \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる。数値積分による厳密解は、右辺の積分を計算する事になる。(2.36) 式の $\{ \}$ の中を考える。 $\Delta x \ll 1$ として指数関数を展開し、また $n(\omega') = n(\omega + \Delta\omega)$ より、こちらも簡単に展開できるので、これらを (2.36) 式に代入してまとめる (付録 C 参照) と、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= 2 \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1 + n) \right] I_1 \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1 + n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1 + n) \right] I_2 \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 3(1 + n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 3(1 + n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1 + n) \right] I_3 \\ &+ 2 \left[\frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + 4(1 + n) \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 6(1 + n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 4(1 + n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1 + n) \right] I_4 \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。ここで、

$$I_k \equiv \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) (\Delta x)^k \quad (2.38)$$

となっている。まず上式を Mathematica を用いて展開 (付録 A 参照) していく。ここで、電子の温度の無次元量として

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{mc^2} \quad (2.39)$$

と定義する。一般に θ_e^n を含む項まで正確に計算する為には、 I_k を $k = 2n$ まで計算する必要がある。ここで、 $n = 5$ の場合を考える。必要な I_k として、 $k = 1 \sim 10$ まで求めると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x \left\{ 4 - x + \theta_e \left(10 - \frac{47}{2} x + \frac{21}{5} x^2 \right) \right. \\ &+ \theta_e^2 \left(\frac{15}{2} - \frac{1023}{8} x + \frac{567}{5} x^2 - \frac{147}{10} x^3 \right) \\ &+ \theta_e^3 \left(-\frac{15}{2} - \frac{2505}{8} x + \frac{9891}{10} x^2 - \frac{9551}{20} x^3 + \frac{1616}{35} x^4 \right) \\ &\left. + \theta_e^4 \left(\frac{135}{32} - \frac{30375}{128} x + \frac{177849}{40} x^2 - \frac{472349}{80} x^3 + \frac{63456}{35} x^4 - \frac{940}{7} x^5 \right) \right\} \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^2 \left\{ 1 + \theta_e \left(\frac{47}{2} - \frac{63}{5} x + \frac{7}{10} x^2 \right) \right. \\ &+ \theta_e^2 \left(\frac{1023}{8} - \frac{1302}{5} x + \frac{161}{2} x^2 - \frac{22}{5} x^3 \right) \\ &+ \theta_e^3 \left(\frac{2505}{8} - \frac{10647}{5} x + \frac{38057}{20} x^2 - \frac{2829}{7} x^3 + \frac{682}{35} x^4 \right) \\ &\left. + \theta_e^4 \left(\frac{30375}{128} - \frac{187173}{20} x + \frac{1701803}{80} x^2 - \frac{44769}{4} x^3 + \frac{61512}{35} x^4 - \frac{510}{7} x^5 \right) \right\} \quad (2.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^3 \left\{ \theta_e \left(\frac{42}{5} - \frac{7}{5} x \right) \right. \\ &+ \theta_e^2 \left(\frac{868}{5} - \frac{658}{5} x + \frac{88}{5} x^2 - \frac{11}{30} x^3 \right) \\ &+ \theta_e^3 \left(\frac{7098}{5} - \frac{14253}{5} x + \frac{8084}{7} x^2 - \frac{3503}{28} x^3 + \frac{64}{21} x^4 \right) \\ &\left. + \theta_e^4 \left(\frac{62391}{10} - \frac{614727}{20} x + 28193 x^2 - \frac{123083}{16} x^3 + \frac{14404}{21} x^4 - \frac{344}{21} x^5 \right) \right\} \quad (2.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2} \sigma_T N_e \theta_e x^4 \left\{ \frac{7}{10} \theta_e \right. \\ &+ \theta_e^2 \left(\frac{329}{5} - 22x + \frac{11}{10} x^2 \right) \\ &+ \theta_e^3 \left(\frac{14253}{10} - \frac{9297}{7} x + \frac{7781}{28} x^2 - \frac{320}{21} x^3 + \frac{16}{105} x^4 \right) \\ &\left. + \theta_e^4 \left(\frac{614727}{40} - \frac{124389}{4} x + \frac{239393}{16} x^2 - \frac{7010}{3} x^3 + \frac{12676}{105} x^4 - \frac{11}{7} x^5 \right) \right\} \quad (2.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^5 \left\{ \theta_e^2 \left(\frac{44}{5} - \frac{11}{10}x \right) \right. \\
&+ \theta_e^3 \left(\frac{18594}{35} - \frac{36177}{140}x + \frac{192}{7}x^2 - \frac{64}{105}x^3 \right) \\
&+ \left. \theta_e^4 \left(\frac{124389}{10} - \frac{1067109}{80}x + 3696x^2 - \frac{5032}{15}x^3 + \frac{66}{7}x^4 - \frac{11}{210}x^5 \right) \right\} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^6 \left\{ \frac{11}{30}\theta_e^2 \right. \\
&+ \theta_e^3 \left(\frac{12059}{140} - \frac{64}{3}x + \frac{32}{35}x^2 \right) \\
&+ \left. \theta_e^4 \left(\frac{355703}{80} - \frac{8284}{3}x + \frac{6688}{15}x^2 - 22x^3 + \frac{11}{42}x^4 \right) \right\} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^7 \left\{ \theta_e^3 \left(\frac{128}{21} - \frac{64}{105}x \right) \right. \\
&+ \left. \theta_e^4 \left(\frac{16568}{21} - \frac{30064}{105}x + \frac{176}{7}x^2 - \frac{11}{21}x^3 \right) \right\} \quad (2.46)
\end{aligned}$$

$$I_8 = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^8 \left\{ \frac{16}{105}\theta_e^3 + \theta_e^4 \left(\frac{7516}{105} - \frac{99}{7}x + \frac{11}{21}x^2 \right) \right\} \quad (2.47)$$

$$I_9 = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^9 \left\{ \theta_e^4 \left(\frac{22}{7} - \frac{11}{42}x \right) \right\} \quad (2.48)$$

$$I_{10} = \frac{1}{2}\sigma_T N_e \theta_e x^{10} \left\{ \frac{11}{210}\theta_e^4 \right\} \quad (2.49)$$

という結果が得られる。ここで σ_T はトムソン散乱断面積を表す。さて、ここで求まった I_k と、近似的にプランク分布とみなしている宇宙背景放射の分布関数、

$$n_0(X) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (2.50)$$

$$X \equiv \frac{\omega}{k_B T_0} \quad (2.51)$$

を、(2.40)～(2.49) 式と共に、(2.37) 式に代入し、 $T_0/T_e \ll 1$ として計算する。最後に両辺を t で積分するとスニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式として、

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4] \quad (2.52)$$

$$Y_0 = -4 + \tilde{X} \quad (2.53)$$

$$Y_1 = -10 + \frac{47}{2}\tilde{X} - \frac{42}{5}\tilde{X}^2 + \frac{7}{10}\tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left(-\frac{21}{5} + \frac{7}{5}\tilde{X} \right) \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} Y_2 = & -\frac{15}{2} + \frac{1023}{8}\tilde{X} - \frac{868}{5}\tilde{X}^2 + \frac{329}{5}\tilde{X}^3 - \frac{44}{5}\tilde{X}^4 + \frac{11}{30}\tilde{X}^5 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{434}{5} + \frac{658}{5}\tilde{X} - \frac{242}{5}\tilde{X}^2 + \frac{143}{30}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{44}{5} + \frac{187}{60}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} Y_3 = & \frac{15}{2} + \frac{2505}{8}\tilde{X} - \frac{7098}{5}\tilde{X}^2 + \frac{14253}{10}\tilde{X}^3 - \frac{18594}{35}\tilde{X}^4 \\ & + \frac{12059}{140}\tilde{X}^5 - \frac{128}{21}\tilde{X}^6 + \frac{16}{105}\tilde{X}^7 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{3549}{5} + \frac{14253}{5}\tilde{X} - \frac{102267}{35}\tilde{X}^2 + \frac{156767}{140}\tilde{X}^3 - \frac{1216}{7}\tilde{X}^4 + \frac{64}{7}\tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{18594}{35} + \frac{205003}{280}\tilde{X} - \frac{1920}{7}\tilde{X}^2 + \frac{1024}{35}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left(-\frac{544}{21} + \frac{992}{105}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} Y_4 = & -\frac{135}{32} + \frac{30375}{128}\tilde{X} - \frac{62391}{10}\tilde{X}^2 + \frac{614727}{40}\tilde{X}^3 - \frac{124389}{10}\tilde{X}^4 \\ & + \frac{355703}{80}\tilde{X}^5 - \frac{16568}{21}\tilde{X}^6 + \frac{7516}{105}\tilde{X}^7 - \frac{22}{7}\tilde{X}^8 + \frac{11}{210}\tilde{X}^9 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{62391}{20} + \frac{614727}{20}\tilde{X} - \frac{1368279}{20}\tilde{X}^2 + \frac{4624139}{80}\tilde{X}^3 - \frac{157396}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{30064}{7}\tilde{X}^5 - \frac{2717}{7}\tilde{X}^6 + \frac{2761}{210}\tilde{X}^7 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{124389}{10} + \frac{6046951}{160}\tilde{X} - \frac{248520}{7}\tilde{X}^2 + \frac{481024}{35}\tilde{X}^3 - \frac{15972}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ & \quad \left. + \frac{18689}{140}\tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left(-\frac{70414}{21} + \frac{465992}{105}\tilde{X} - \frac{11792}{7}\tilde{X}^2 + \frac{19778}{105}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^8 \left(-\frac{682}{7} + \frac{7601}{210}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

が得られる。ここで、

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e \quad (2.58)$$

$$\tilde{X} \equiv X \coth \left(\frac{X}{2} \right) \quad (2.59)$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{X}{\sinh (X/2)} \quad (2.60)$$

とした。 τ は光学的深さを表している。ここで右辺の t による積分であるが、今は自然単位系で考えているので、

$$dt = c dt = dl \quad (2.61)$$

としている。さて、ここで、散乱前後で光子数が変化しない事が重要であるが、 Y_0 から Y_4 まで全てで光子数の変化

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (2.62)$$

を求めると、この積分値が解析的に全て 0 になり、確かに光子数が保存している事がわかる。こうして相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式が求まったのである。 Y_0 の項に注目すると、これはまさにスニャエフとゼルドビッチによって求められた (2.25) 式である事がわかる。すなわち、 $Y_1 \sim Y_4$ が相対論的補正項であるといえる。

導出の最後に、実際に観測される強度変化として、黒体放射の式より

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (2.63)$$

と定義しておく。展開式と積分結果のグラフを図 2.2、2.3 に表した。高次の補正項を入れるに従って徐々に収束している事が分かる。電子温度が高いとずれが生じるが、全体の傾向として、展開式が数値積分による厳密解とよく合っている。

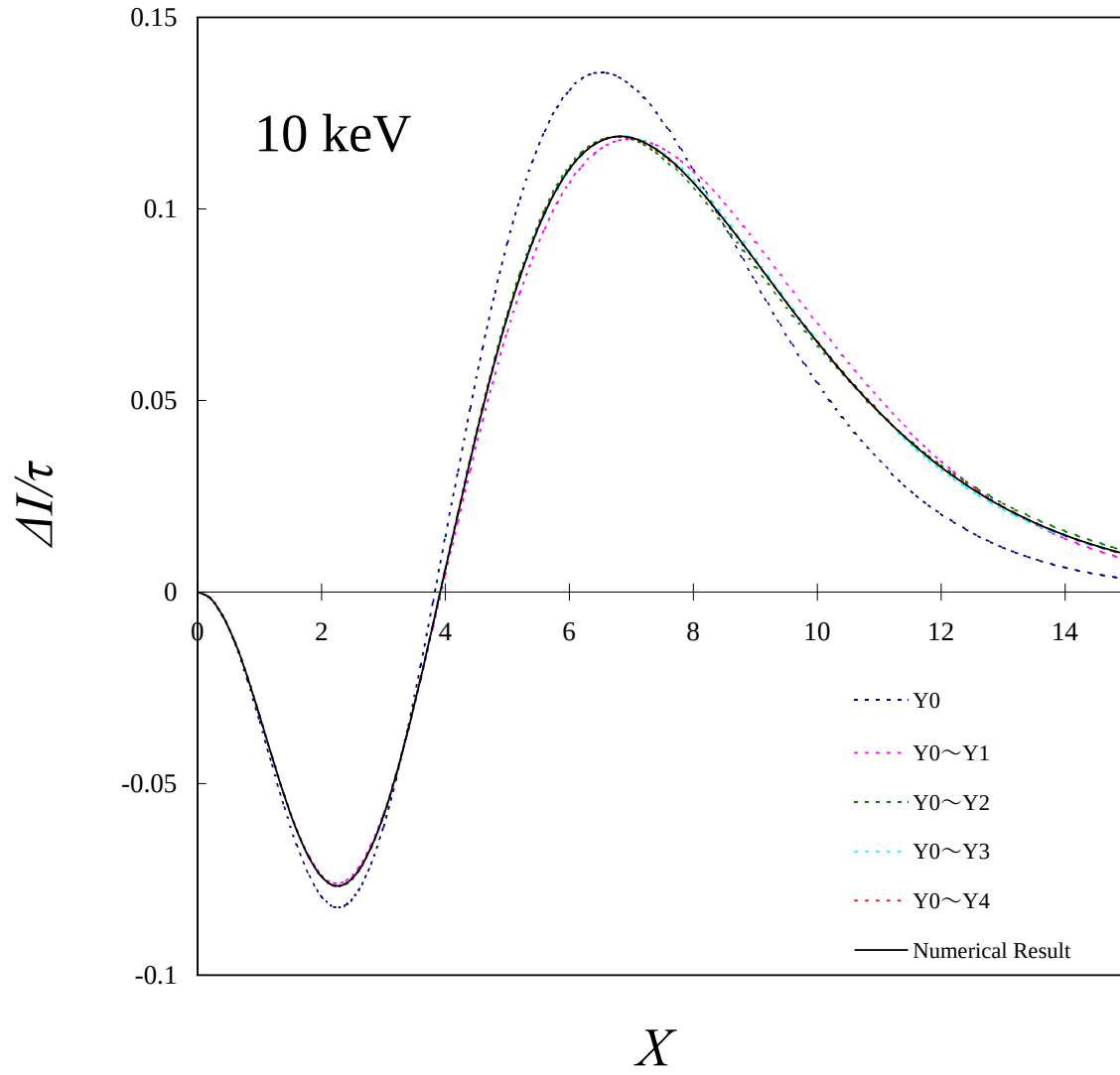


図 2.2: 電子温度、10 keV の場合の相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の数値積分と展開式のグラフ。黒い実線が数値積分の結果。

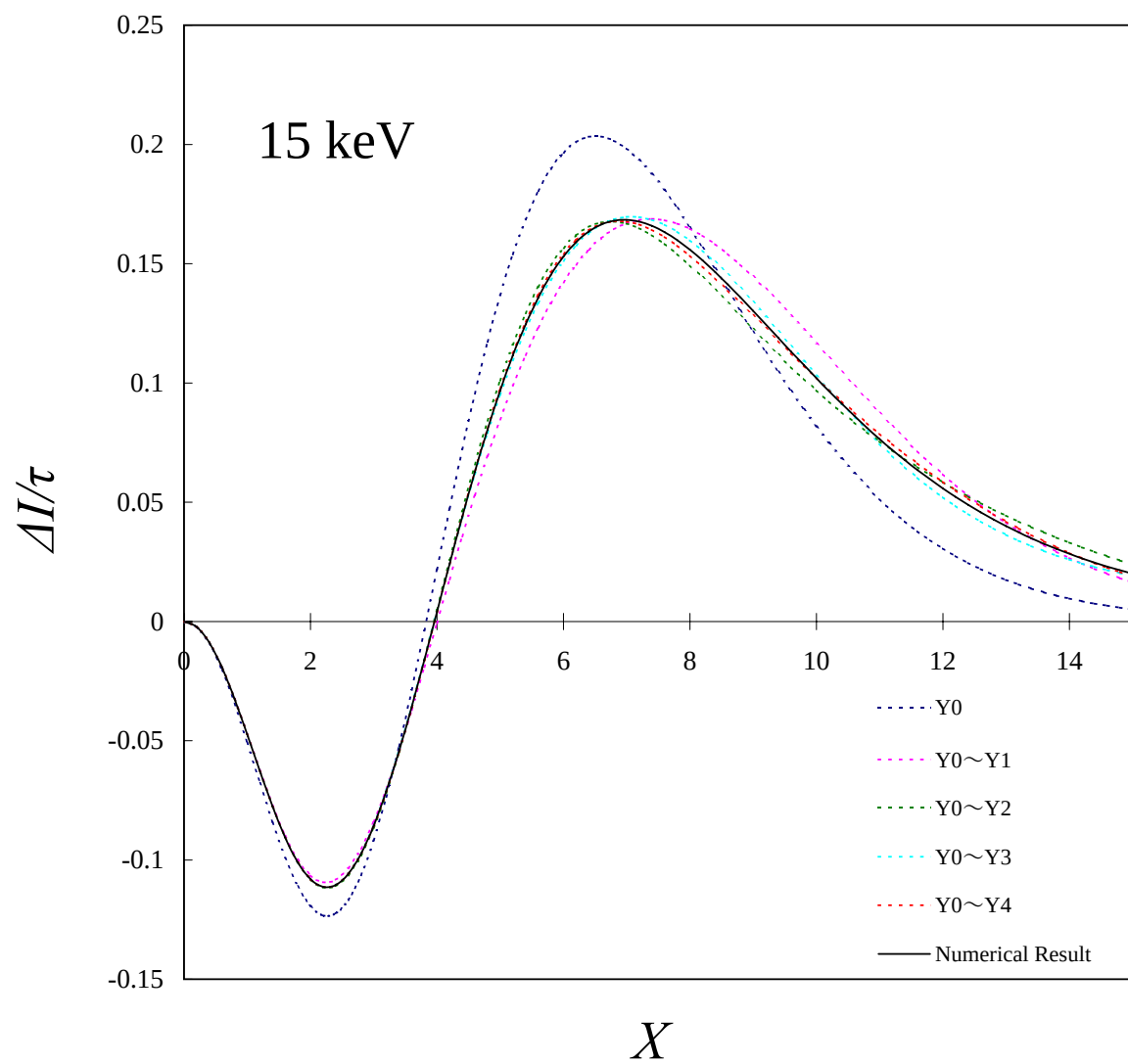


図 2.3: 図 2.2 と同じであるが、15 keV とした。

2.3.2 展開式の解析と非相対論との比較

さて、次に展開式の解析を行っていく。展開式の精度を確認する為に、展開式と数値積分による厳密解の相対誤差、

$$\delta \equiv \left| \frac{(\Delta I)_{analytic} - (\Delta I)_{numerical}}{(\Delta I)_{numerical}} \right| \quad (2.64)$$

を定義する。調べる温度領域は、現在見つかった最も高温の銀河団が約 17.4 keV であるので、10, 15, 20 keV の場合に関して、図 2.4 に表した。まずは、クロスオーバー周波数を X_0 として、 $X < X_0$ の領域を考える。 $X \rightarrow 0$ ではどの温度であっても $\delta < 10^{-5}$ とかなりの精度で厳密解と一致している事がわかる。この点からもこの展開計算の正しさが理解できる。

次に $X = X_0$ のクロスオーバー周波数付近の領域を見てみる。この領域は、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測する上で非常に重要な領域になる。クロスオーバー周波数では、厳密解も 0 に近い値を取るなので、必然的に相対誤差が大きくなってしまう。また、高温になるほど誤差も大きくなるようである。先に述べたように、クロスオーバー周波数の正確な評価は非常に重要であるので、少しでも誤差を小さくする必要がある。これに関しては、この先の節で詳しく述べる事にする。

最後に $X > X_0$ の領域を見てみる。この領域において、展開式は収束が遅く、 $X < X_0$ の領域と比べると、誤差が広がっている。また、高温であるほどその差も大きくなる。現在では、高周波数側での観測は、ほとんど行われていないが、将来的には、この領域での観測 (Planck の最大観測周波数は、 $X \approx 15$) も行われる予定である。よって、この領域での精度も改善する事が望ましいだろう。

続いて、非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果との比較を行う。非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式の Y_0 の項に相当する。さて、この効果がどの程度効いてくるのかを検証する。図 2.5 より、相対論的效果が無視出来ない影響を与える事がわかる。相対論の影響が小さくなる温度の低い 5 keV の場合でもその違いが見て分かる程である。また、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が観測できるクロスオーバー周波数付近の拡大図が図 2.6 である。これを見ると、10 keV の場合、非相対論的な場合で $X \approx 3.83$ (約 218 GHz)、相対論的な場合で $X \approx 3.92$ (約 223 GHz) と、クロスオーバー周波数自体に 2%程度の違いが出てくる。これは、次の様に理解できる。クロスオーバー周波数は、(2.52) 式において左辺を 0 として求める事ができる。す

なわち、

$$0 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right] \quad (2.65)$$

の X についての解がクロスオーバー周波数である。ここで、非相対論的な場合を考えると、 $Y_1 \sim Y_4$ までの項を考えないので、この解は、 θ_e に関する依存性がない。つまり、温度に関係なくクロスオーバー周波数は一定である。これは、図 2.6 を見て分かるように、非相対論的な場合は、全て同じ周波数で交差している。これに対して、相対論を考慮する場合、補正項に θ_e 依存性がある為、(2.65) 式の解は、温度依存性を持つ事になる。もちろん電子の温度が高ければ、それだけ大きな違いが現れる。ここで、クロスオーバー周波数のずれは運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測する際に大きく関わっている。運動学的効果を観測する為には、熱的效果がなくなる周波数でないと、観測が非常に難しい。また、運動学的効果は熱的效果に比べ、現れる効果が格段に小さいので、2%の誤差であっても、非常にシビアに効いてくる事になるのである。相対論的補正は、現在の観測においても非常に重要となっている。実際に、前節で紹介した表の結果等は、この展開式を用いて解析が行われた。

また、この節の最後に、実際に観測が行われている周波数での、相対論的補正の影響を調べてみる。ここでは、2007 年の 3 月から観測開始予定である SPT の観測周波数、90($X \approx 1.584$), 150($X \approx 2.641$), 220($X \approx 3.873$), 270($X \approx 4.753$) GHz を対象とした。表 2.2 から、影響の小さい場所でも、3%の違いがあり、大きい場所では、50%近い相対論の効果が現れている。この事から相対論補正の重要性が伺える。また、クロスオーバー周波数付近では、相対論補正によるクロスオーバー周波数のずれから、かなり違う値が出てきている。ただし、値自体が小さいので展開式の誤差も大きくなっている所でもある。この表には載せていないが、Planck の観測限界である、 $X \approx 15$ では、相対論を考慮した場合、非相対論と比べ約 4 倍もの値になる。

X	θ_e	Y_0 (=A)	$Y_0 \sim Y_4$ (=B)	Numerical Result (=C)	$ A/B $	$ (C-B)/C $
1.584	0.01	-0.03267	-0.03169	-0.03169	1.031	2.62×10^{-5}
	0.02	-0.06535	-0.06153	-0.06153	1.062	2.75×10^{-6}
	0.03	-0.09802	-0.08970	-0.08970	1.093	1.94×10^{-5}
2.641	0.01	-0.03834	-0.03701	-0.03701	1.036	2.65×10^{-5}
	0.02	-0.07669	-0.07168	-0.07168	1.070	1.06×10^{-6}
	0.03	-0.11502	-0.10441	-0.10441	1.101	2.06×10^{-5}
3.873	0.01	0.00183	-1.899×10^{-5}	-1.852×10^{-5}	96.38	2.55×10^{-2}
	0.02	0.00366	-0.00323	-0.00320	1.135	8.89×10^{-3}
	0.03	-0.00549	0.00913	-0.00886	0.601	3.12×10^{-2}
4.753	0.01	0.03743	0.03272	0.03272	1.144	5.28×10^{-5}
	0.02	0.07487	0.05762	0.05758	1.299	7.78×10^{-4}
	0.03	0.11230	0.07682	0.07636	1.462	6.13×10^{-3}

表 2.2: SPT の観測周波数における相対論補正の影響

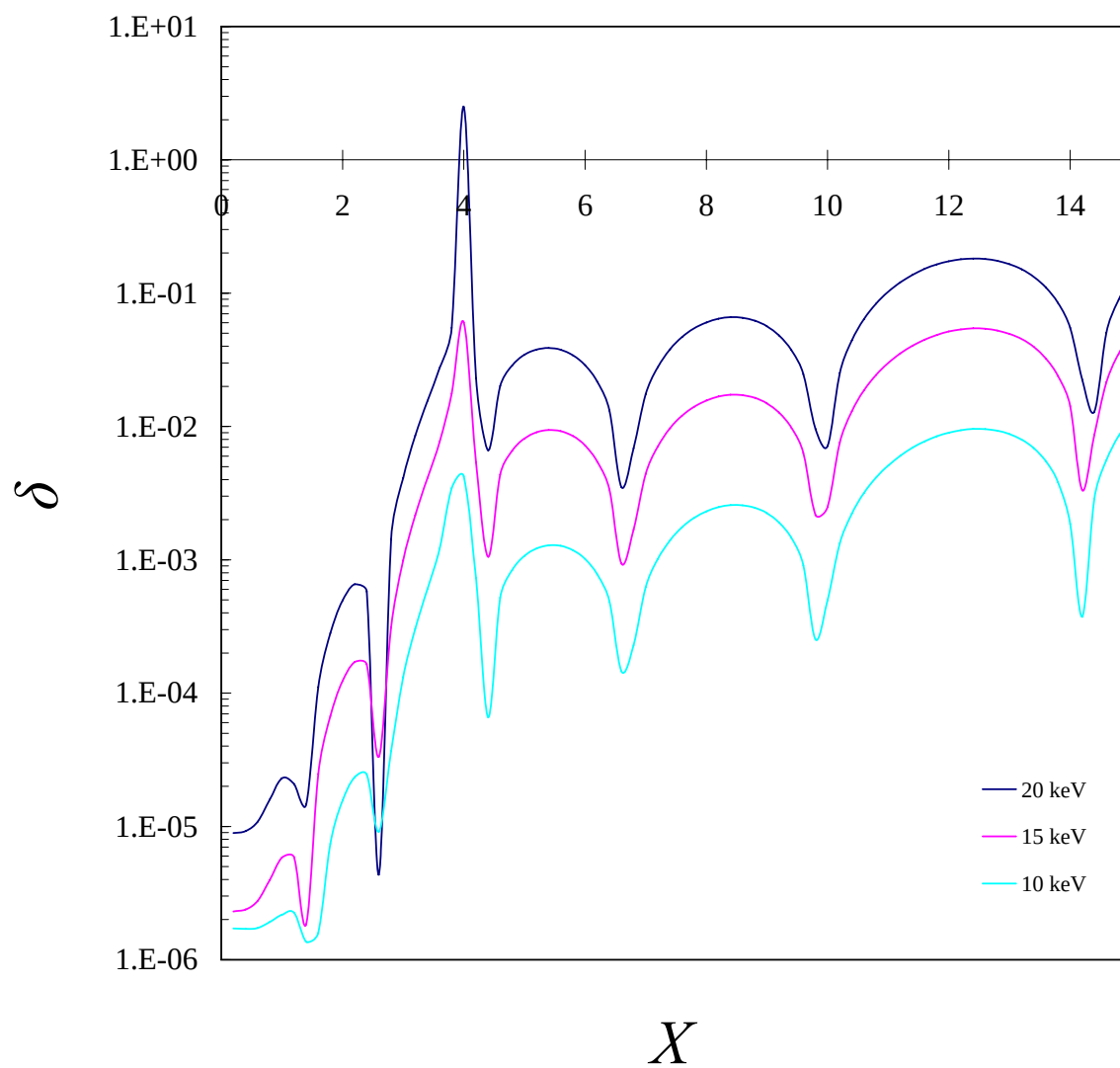


図 2.4: 数値積分による厳密解との相対誤差を取ったものを電子温度 10, 15, 20 keV で比較したグラフ。

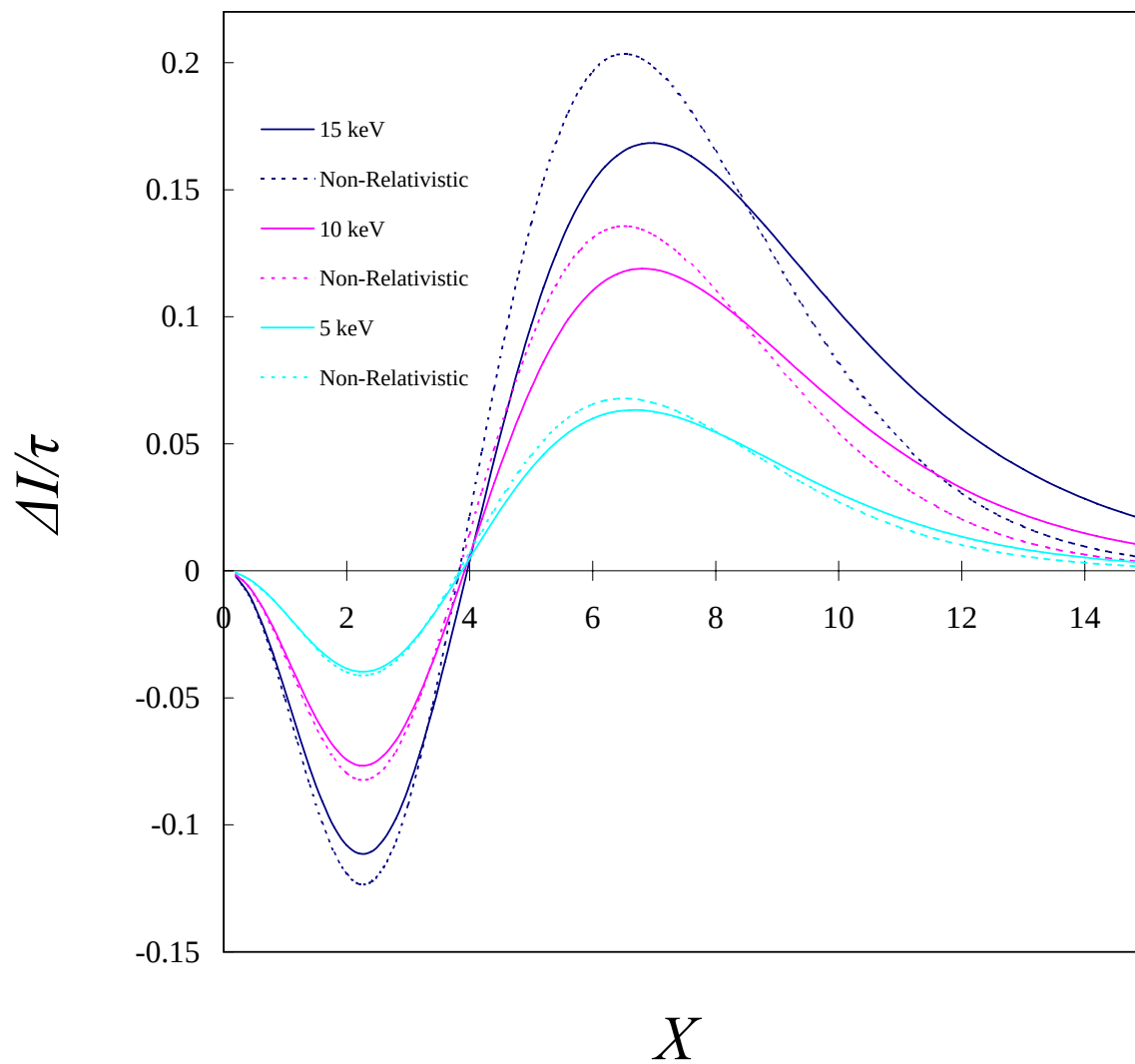


図 2.5: 電子温度 5, 10, 15 keV における相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の比較。実線が相対論的、点線が非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を表す。

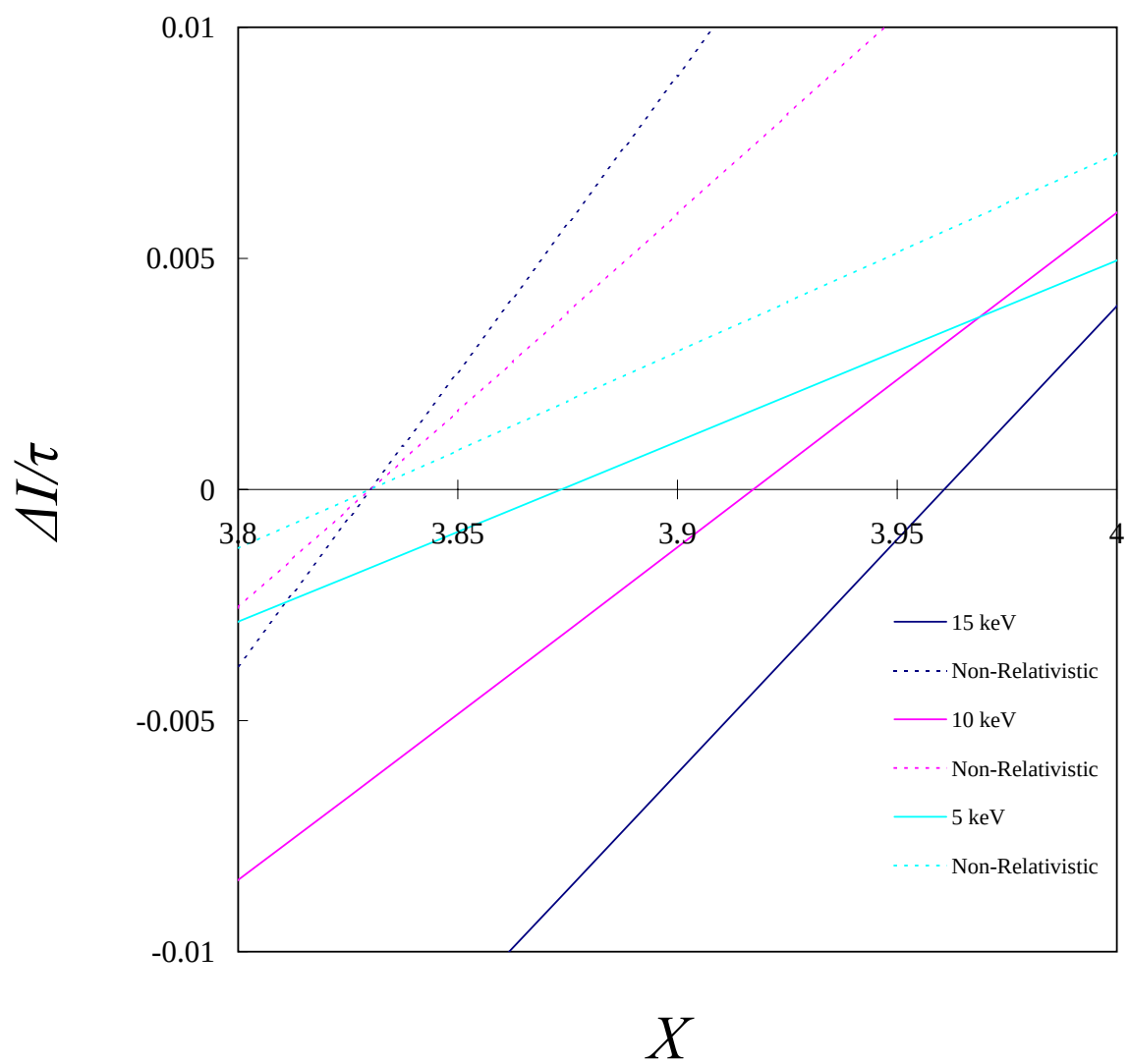


図 2.6: 図 2.5 と同じであるが、クロスオーバー周波数付近で拡大したグラフ。

2.4 スニャエフ・ゼルドビッチ効果の高次展開

さて、ここまでの結果は、以前、伊藤・野澤・神山 [32] によって一度計算されている。ここでは、 θ_e に関してより高次の項まで考慮した時に、展開式がどのような振る舞いをするのかを詳しく調べていく。ここでは、振る舞いをしっかりと確認する為に可能な限り、高次の項まで計算を試みた。今回は、 θ_e^{11} の項を含む Y_{10} の項まで正確に計算した。計算の方法は Y_4 までを計算した場合と同じであるが、各 θ_e を含む項に関して、しっかりと 11 次まで取らないと間違った結果が出てしまうので、実際に計算する際は注意 (I_k に関しては $k = 22$ まで) が必要である。高次展開の結果を用いると展開式は、次のように、

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10} \right] \quad (2.66)$$

と表される。 $Y_5 \sim Y_{10}$ までの各項については、付録 A を参照してもらいたい。電子温度 10, 15, 20 keV の場合のスニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフとそれぞれの数値計算との相対誤差 δ のグラフが図 2.7～図 2.13 である。10 keV の場合を見ると、どの周波数においてもより高次まで取った方がより精度が高くなっている事が確認できる。次に、15 keV の場合を見てみると、 $X > 10$ の高周波数側では、高次まで取った方が精度が悪くなるという今までと逆の状態になっている。最後に、20 keV の場合を見てみる。このグラフを見てみると、 $X > 6$ の高周波数側でグラフが厳密解を中心とする、振動をしながら発散している事が確認できる。また、図 2.13 は、それぞれ Y_8, Y_9, Y_{10} まで取ったグラフであり、考慮する次数が一つ違うと、どのように変化するか分かる。この図より、

- どの次数まで取っても、振動が激しくなる周波数はほぼ同じである。
- 同じ周波数において、振動の大きさは、ほぼ次数に比例している。
- 同じ周波数では、次数が 1 異なると振動の向きが逆である。

という特徴が分かる。

以上の結果を考慮すると、どのような温度であってもある周波数以下では、高次の項まで考慮した方が精度が良い。このある周波数というのは高温である程、低い周波数になる。この周波数を超えると振動が激しくなり、高次の項を取った方が厳密解との誤差が大きくなってしまう。

ここまでの結果から解る事は、この展開計算の限界である。電子温度が 10 keV の場合で

は、高次展開する事でかなりの収束が見られる。これ以下の温度であれば、さらに収束が良いだろう。15 keV の場合では、遅くなっているが、確かに収束している。しかし、高周波数側で精度の逆転が起り始めている事から、この温度が展開計算の限界である事が分かる。20 keV になると、もはや収束しているとは言える事は出来ない。

近い将来で最も高周波数側まで観測が可能であるのは、Planck であり、約 850 GHz ($X \approx 15$) まで観測可能である。これを考えると、15 keV の場合であっても、展開式の精度は、十分ではないと言える。しかし、高温・高周波数側における精度は、高次展開を行っても上がるどころか逆に下がる事が確認された。

またこの節の最後に、 $Y_0 \sim Y_{10}$ が単独では、どのような関数になっているのかを確認しておこう。ここで、 Y_n が与える強度変化を、

$$(\Delta I)_n = \frac{X^3}{e^X - 1} \left(\frac{\Delta n}{n_0} \right)_n \quad (2.67)$$

$$\left(\frac{\Delta n}{n_0} \right)_n = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} [\theta_e^n Y_n] \quad (2.68)$$

と定義する。これらの結果が、図 2.14、2.15 である。また、各々の関数は、オーダーにかなりの違いがあるので、適当に拡大してそれぞれの関数を見ていく事にする。また、今回は、5 keV の場合でグラフにしたがこれは、 n が増えるにつれ振動が収束していくので、関数の形を確認しやすい為である。もっと高温の場合では、 Y_n の振動の大きさは、 $(\theta_e/0.01)^{n+1}$ 倍であると考えてもらいたい。これらの図を見ていくと、

- $n = 0$ の時、1 回目の振動方向は負で正負合わせて 2 回の振動がある。
- n が 1 増えると、1 回目の振動方向は逆になり、振動回数が 1 回増える。
- n が増える程、最大振幅は、小さくなる傾向がある。
- n が増える程、最小振幅と最大振幅の相対差が大きくなる。
- n が増える程、 X の大きな所まで振動がある。

という事が分かる。また、最大振幅は小さくなる傾向がある、と述べたが、これは n, θ_e の値で変化し、場合によっては、逆に大きくなる時もある。全体を把握する為に、強度変化の絶対値を取り、対数で表した図が図 2.16～2.19 である。これを見ると、高温である程、 Y_0 と Y_{10} の幅が狭まっている事がわかる。特に、20 keV の場合であると、低次の項と高次

の項が交差して高次の項の影響の方が大きくなっている事がわかる。以上の事を考慮に入れると n が大きい場合、

- $|Y_n/Y_{n-1}| \ll 1$: 展開式の精度は向上
- $|Y_n/Y_{n-1}| \sim 1$: 展開式の精度に変化なし
- $1 \ll |Y_n/Y_{n-1}|$: 展開式の精度は悪化

と推測される。ただしこれは、もちろん周波数に依存する事になる。また、どの温度であっても、 $X \rightarrow 0$ の極限では、常に精度が向上する条件が満たされている。よって高次まで考慮する程、精度が向上すると考えられる。これを利用すると、数値積分の精度が確認できる事になる。何故なら、展開式の方が数値計算より精度が良ければ、曲線が示す値は、数値積分の精度であるからである。 δ のグラフを見ると、高次まで取った曲線は、 $X \rightarrow 0$ で同じ値を示している。よって、熱的効果の数値積分の精度は、 10^{-6} 程度となる事が分かる。また、数値積分に関してはガウス積分のサブルーチンを用いて、98 分点の計算で得られた結果である。

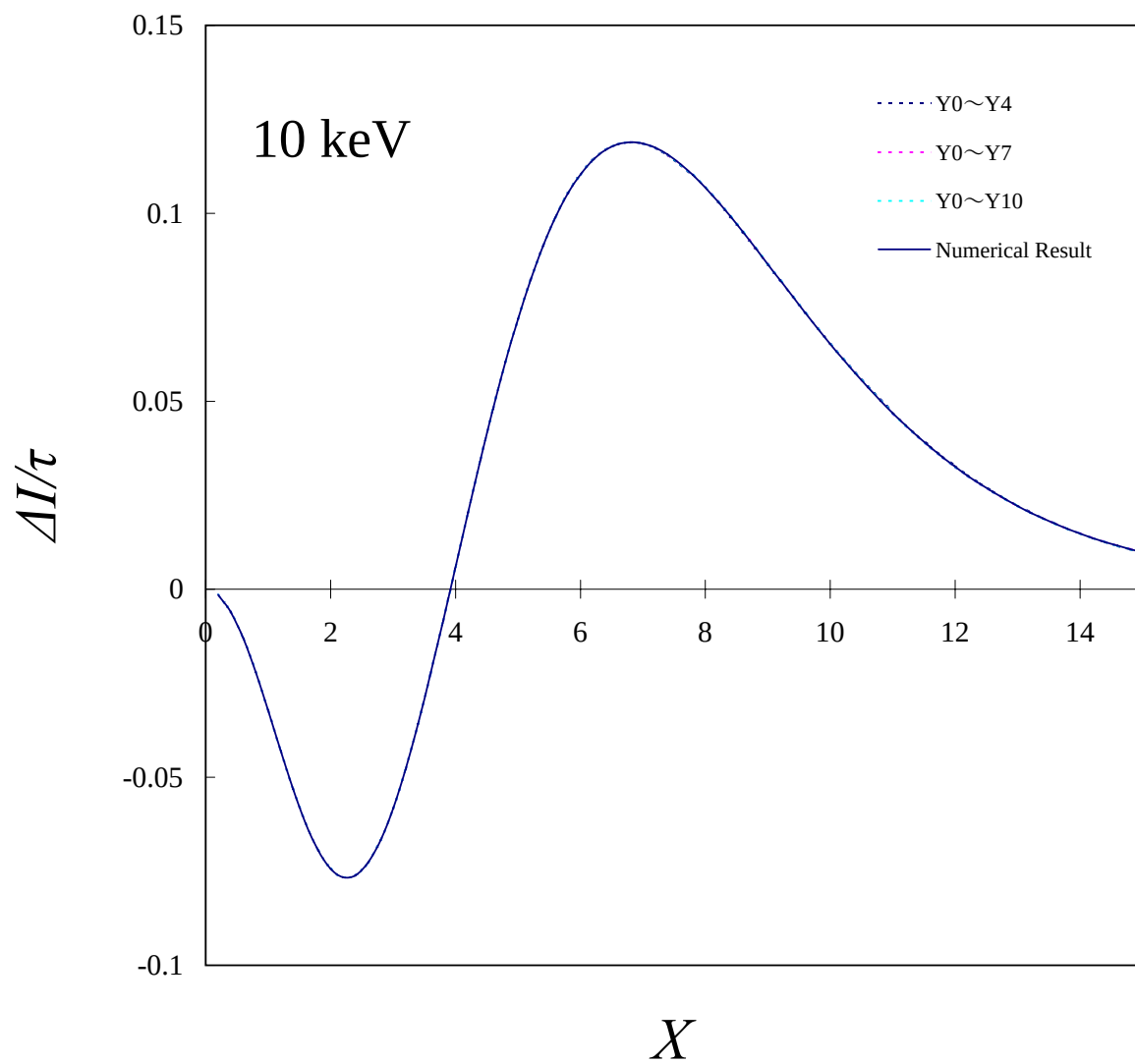


図 2.7: 電子温度、10 keV の場合の相対論的スニャエフゼルドビッチ効果の数値積分と展開式のグラフ。ただし、展開式は、それぞれ $Y_0 \sim Y_4$, $Y_0 \sim Y_7$, $Y_0 \sim Y_{10}$ を考慮したもので比較した。

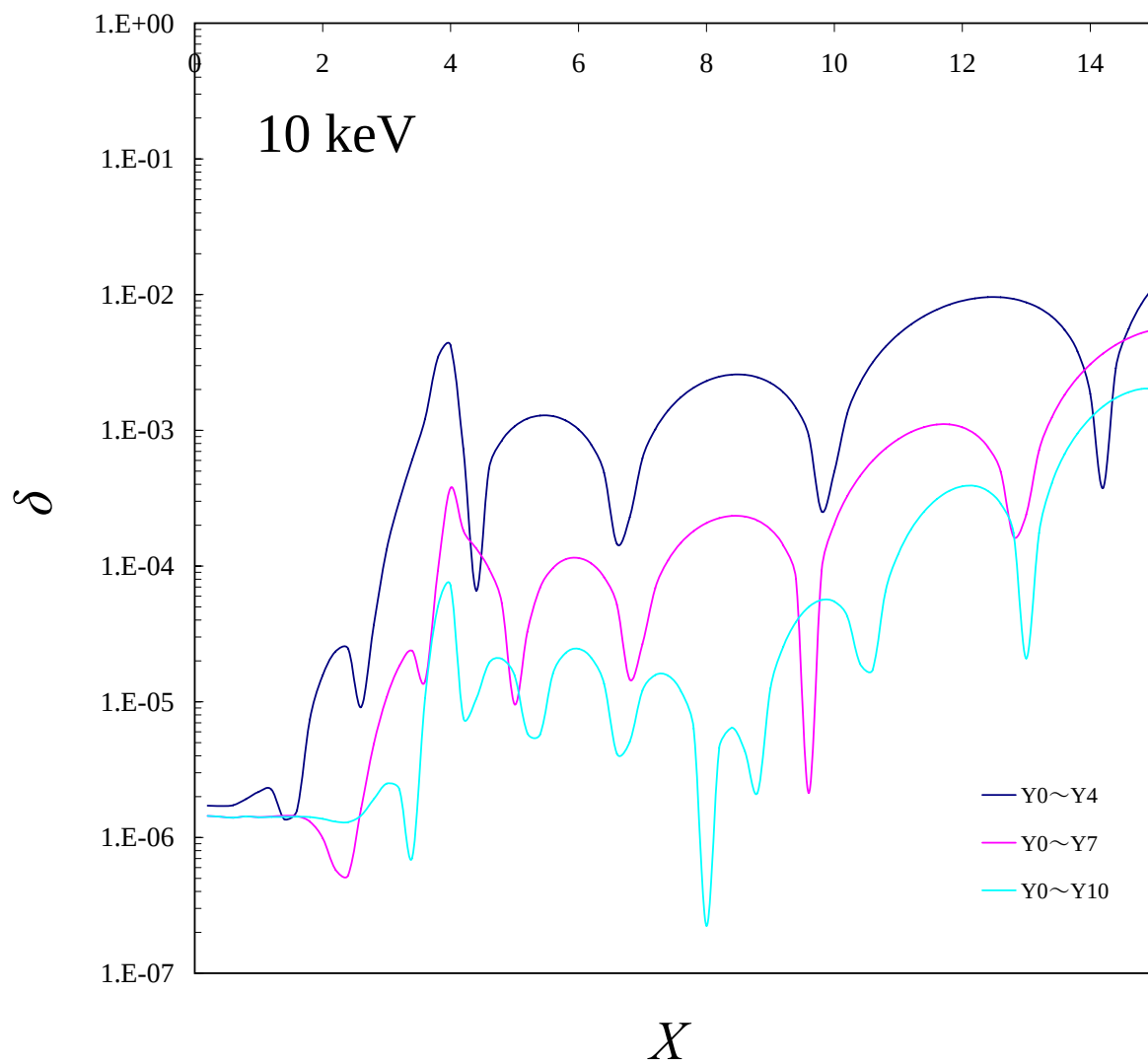


図 2.8: 電子温度 10 keV での数値積分による厳密解と展開式の相対誤差を取ったグラフ。
ただし、展開式は、それぞれ $Y_0 \sim Y_4$, $Y_0 \sim Y_7$, $Y_0 \sim Y_{10}$ を比較した。

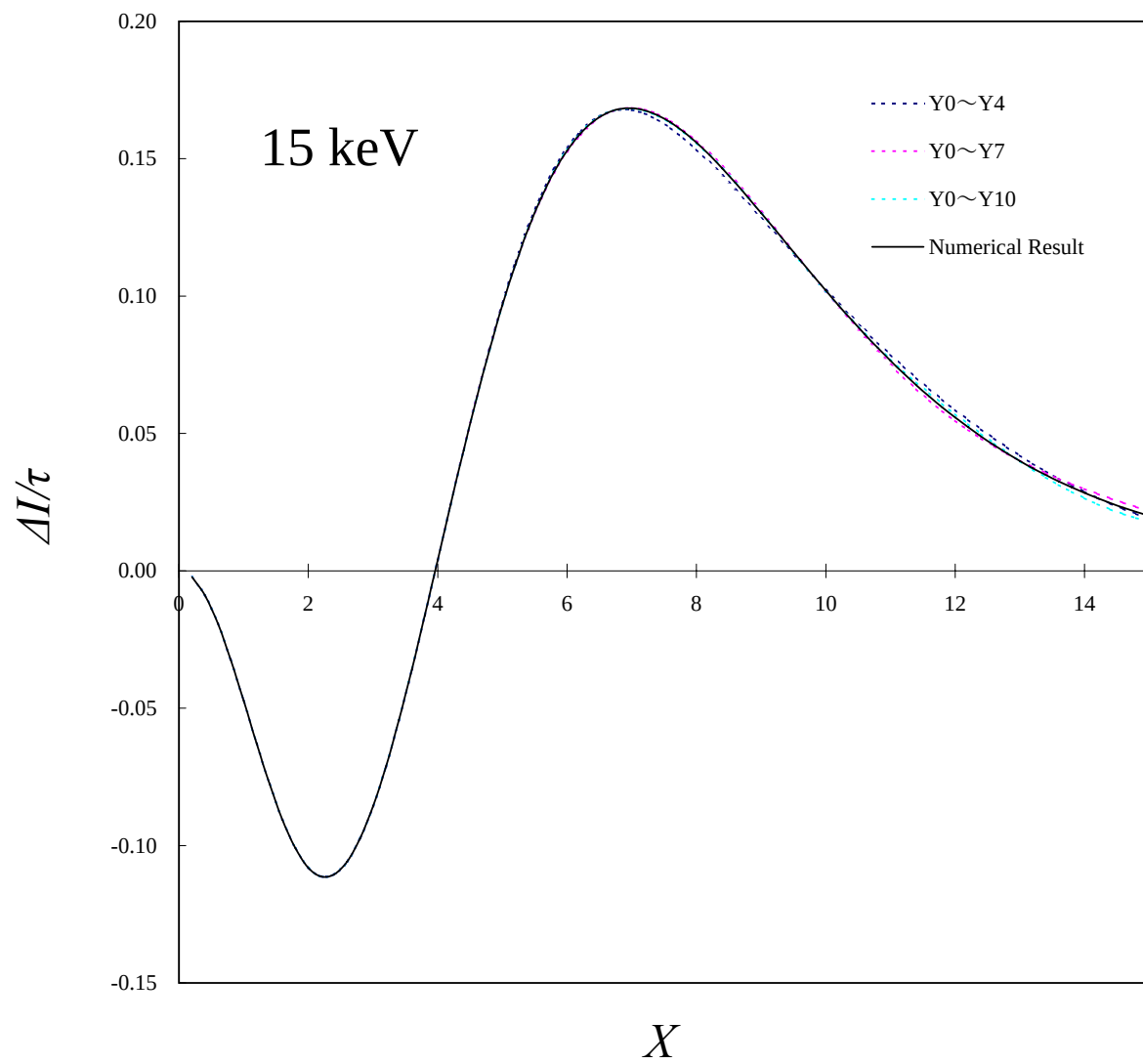


図 2.9: 図 2.7 と同じであるが、15 keV とした。

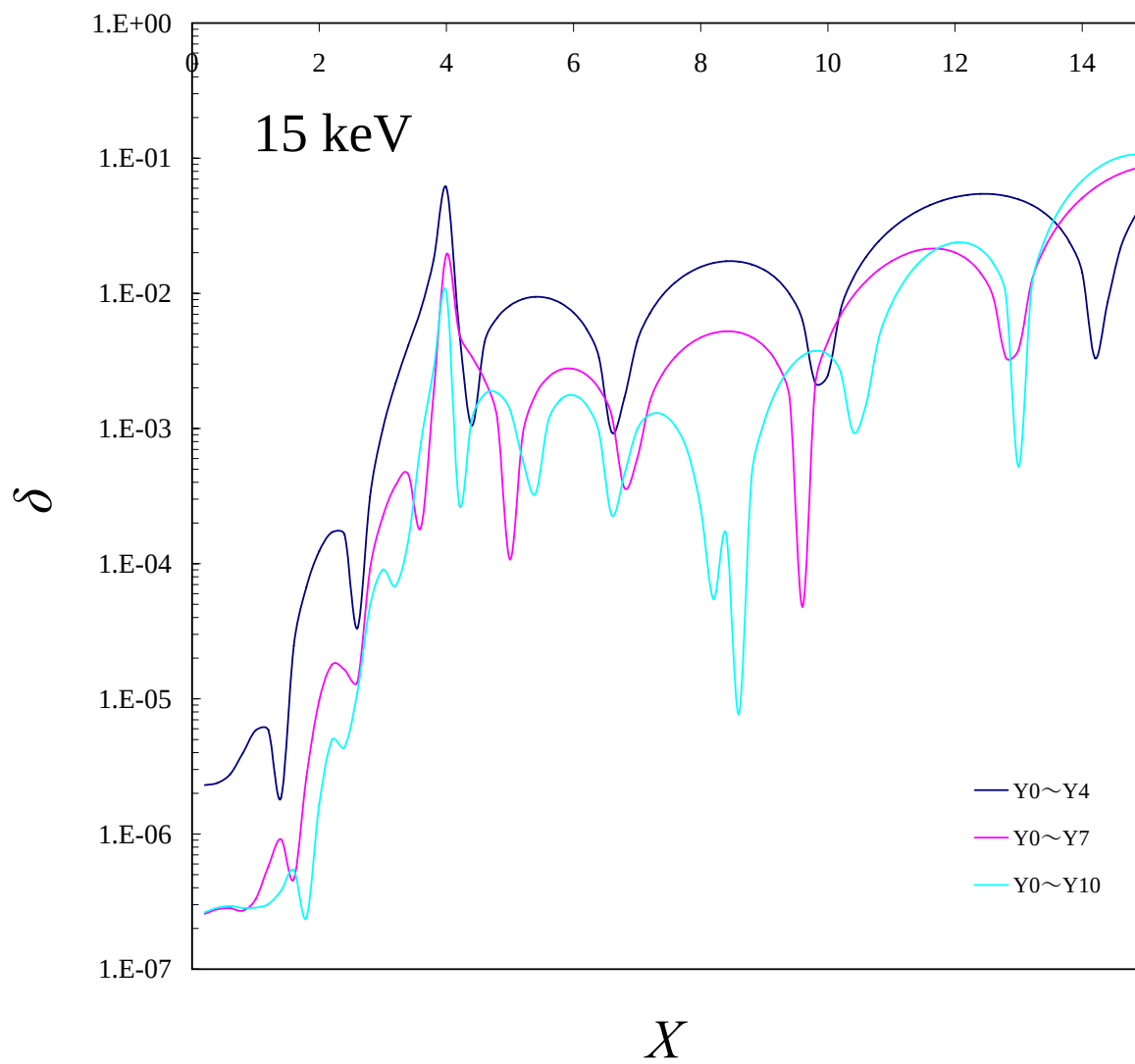


図 2.10: 図 2.8 と同じであるが、15 keV とした。

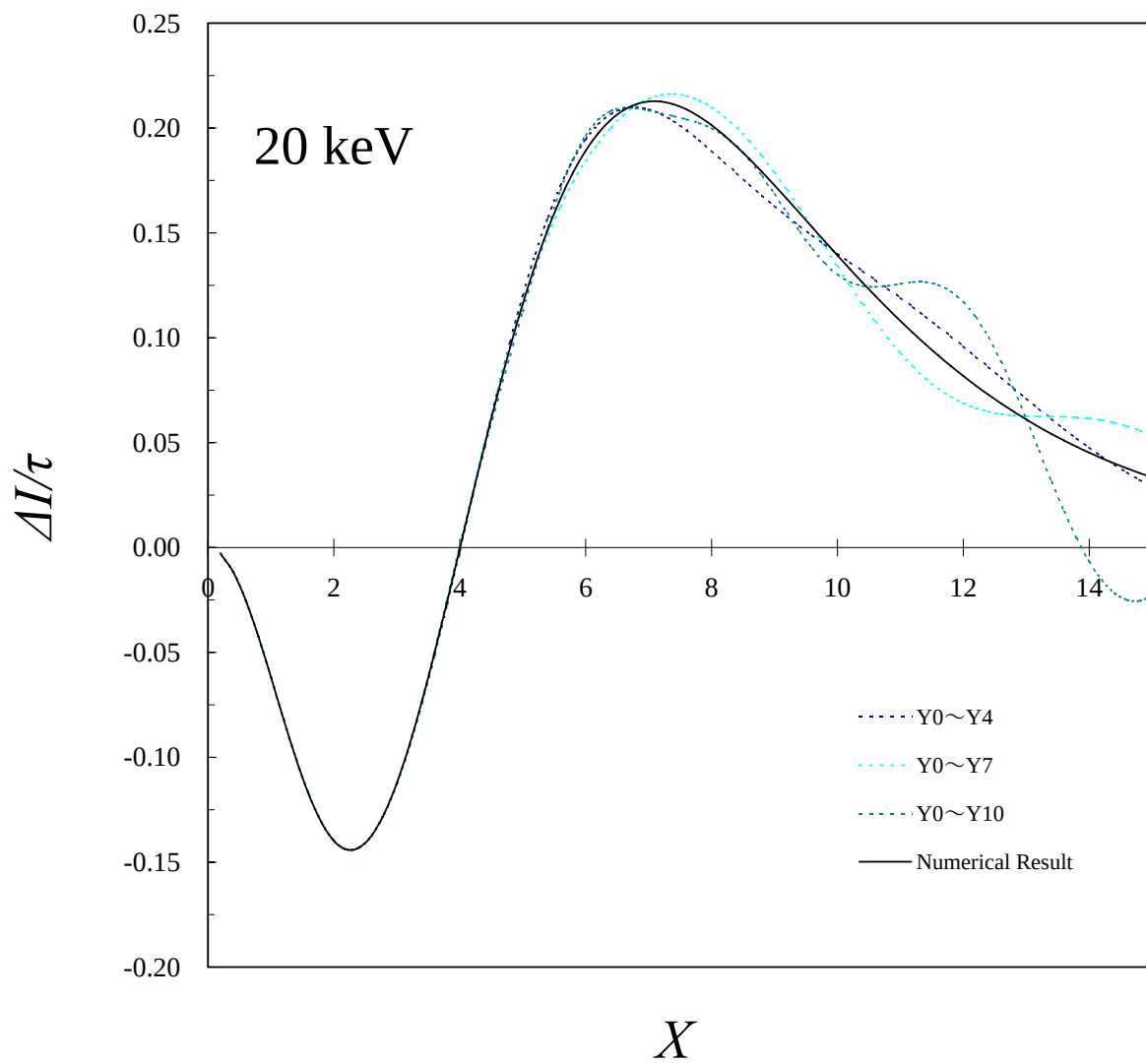


図 2.11: 図 2.7 と同じであるが、20 keV とした。

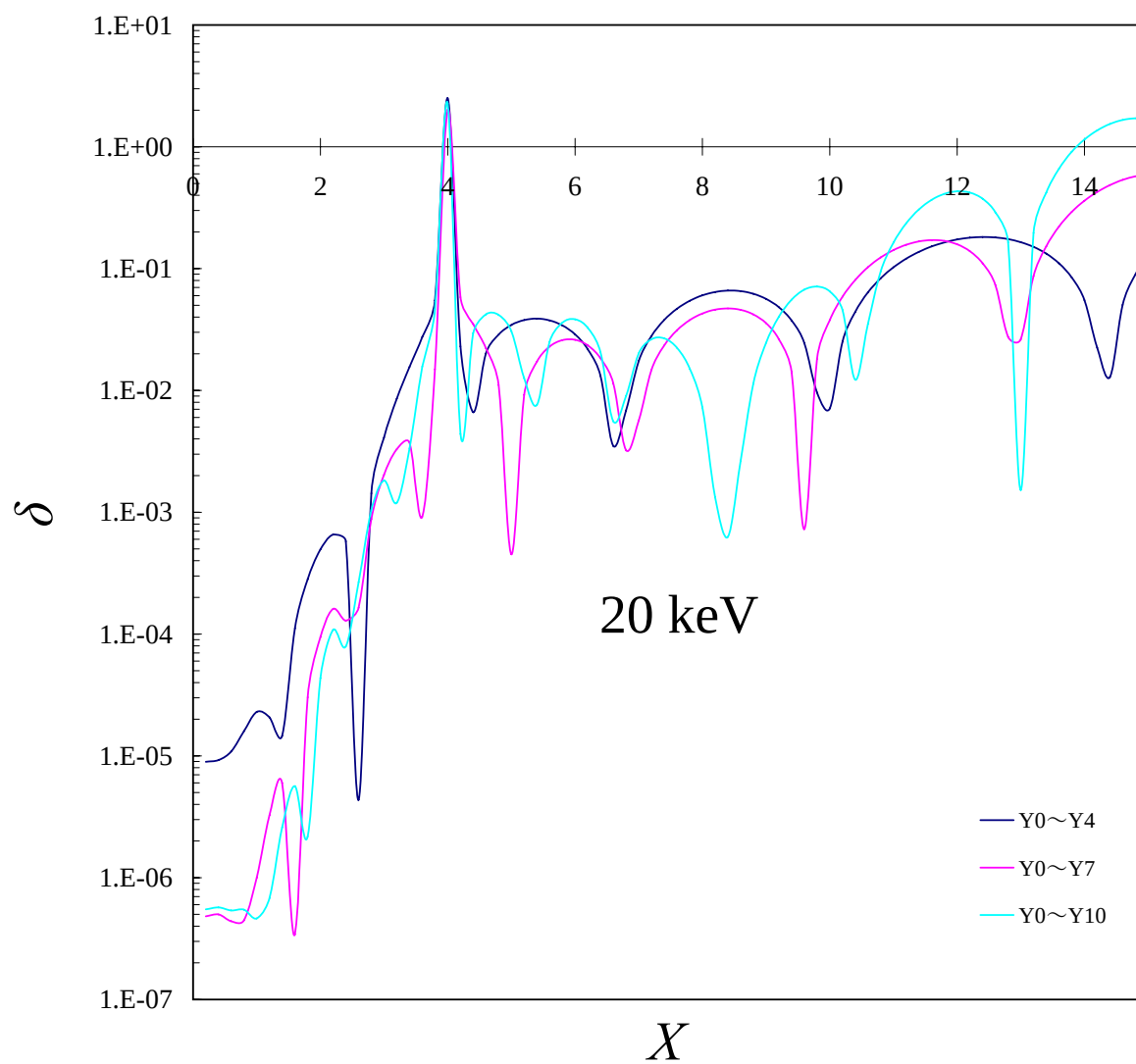


図 2.12: 図 2.8 と同じであるが、20 keV とした。

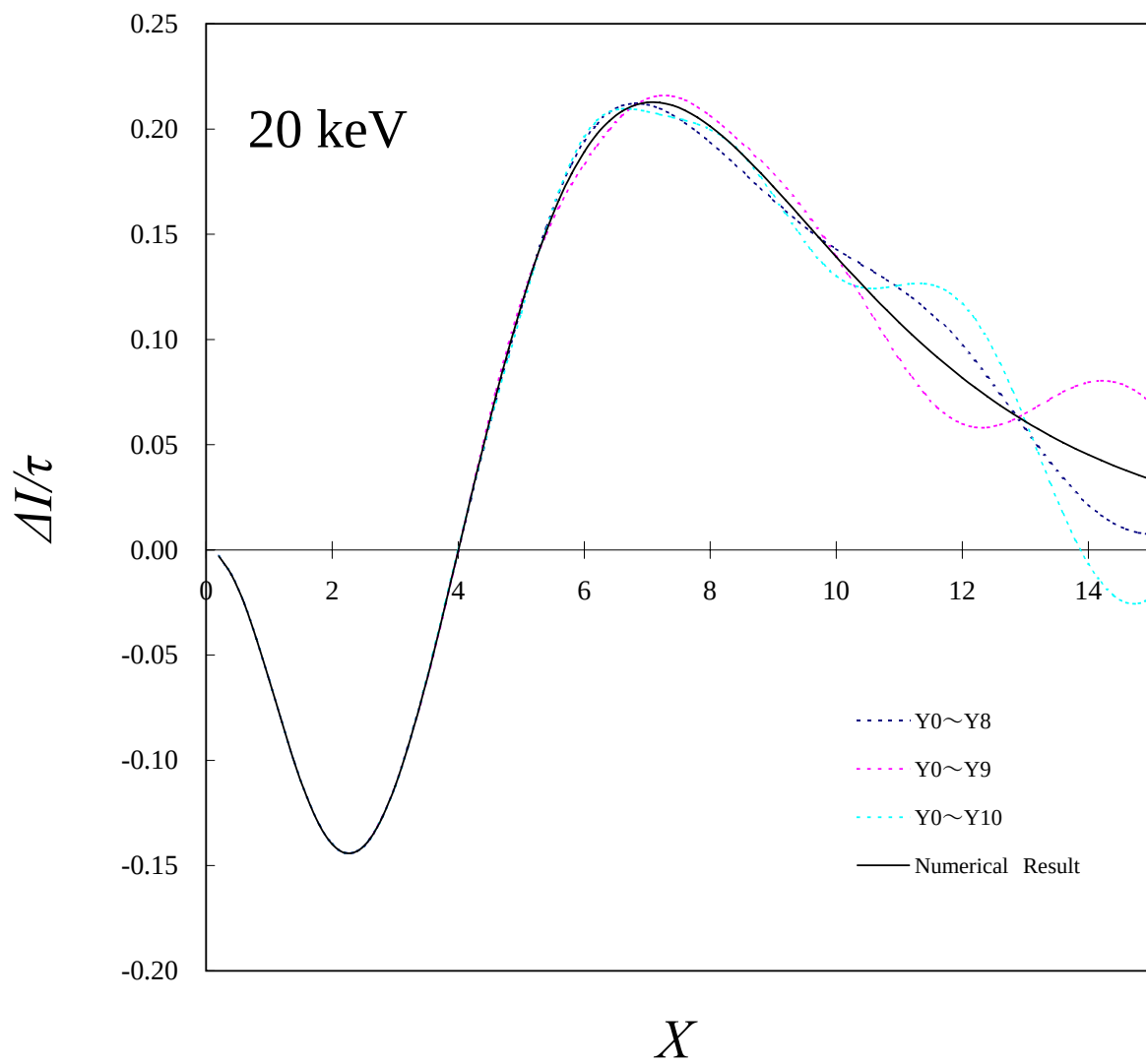


図 2.13: 図 2.11 と同じであるが、比較する展開式をそれぞれ $Y_0 \sim Y_8$, $Y_0 \sim Y_9$, $Y_0 \sim Y_{10}$ とした。

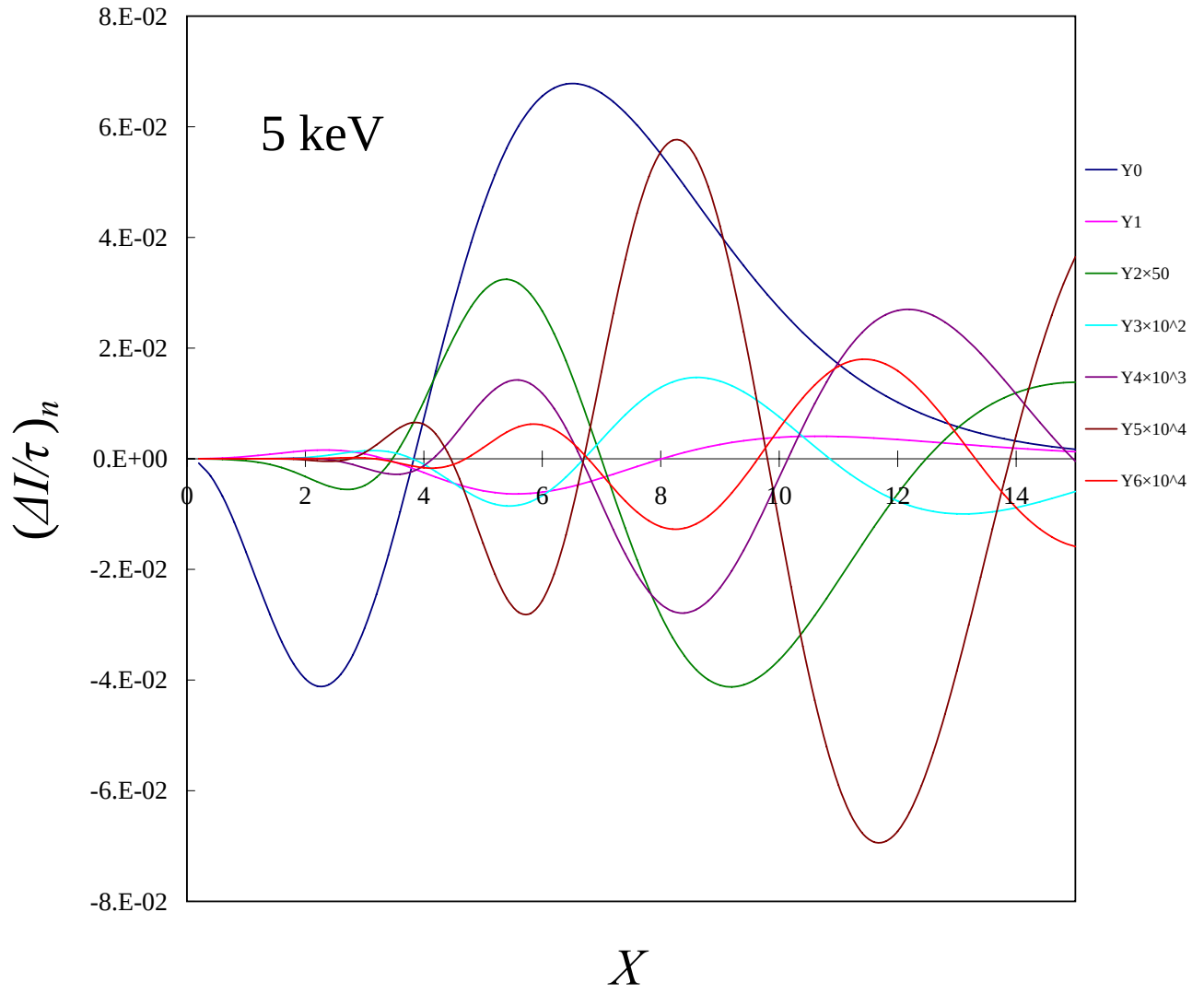


図 2.14: 電子温度 5 keV の熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果における $Y_0 \sim Y_6$ の各々の項による強度変化。

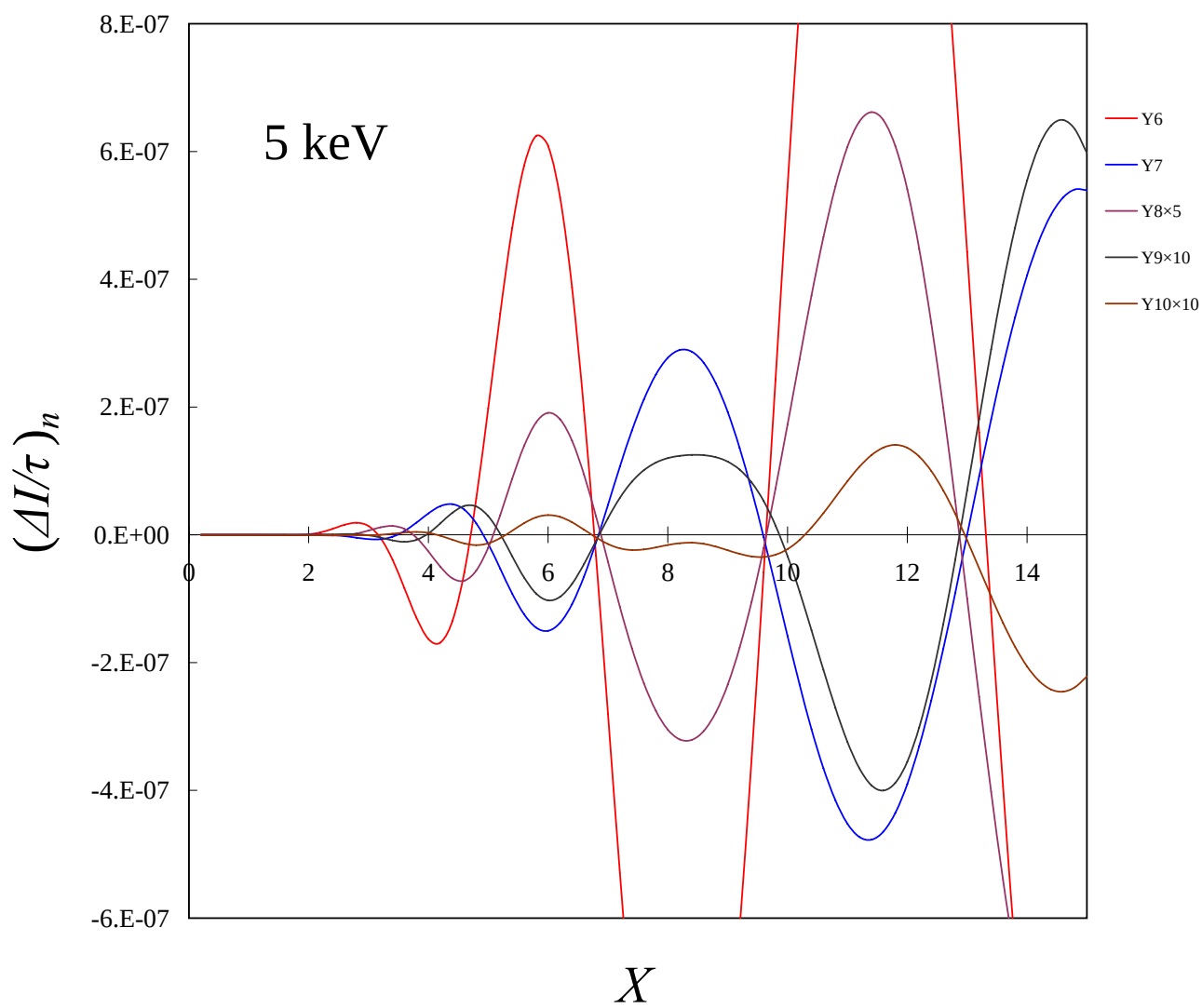


図 2.15: 図 2.14 と同じであるが、 10^5 倍に拡大した。また、比較の対象を $Y_6 \sim Y_{10}$ とした。

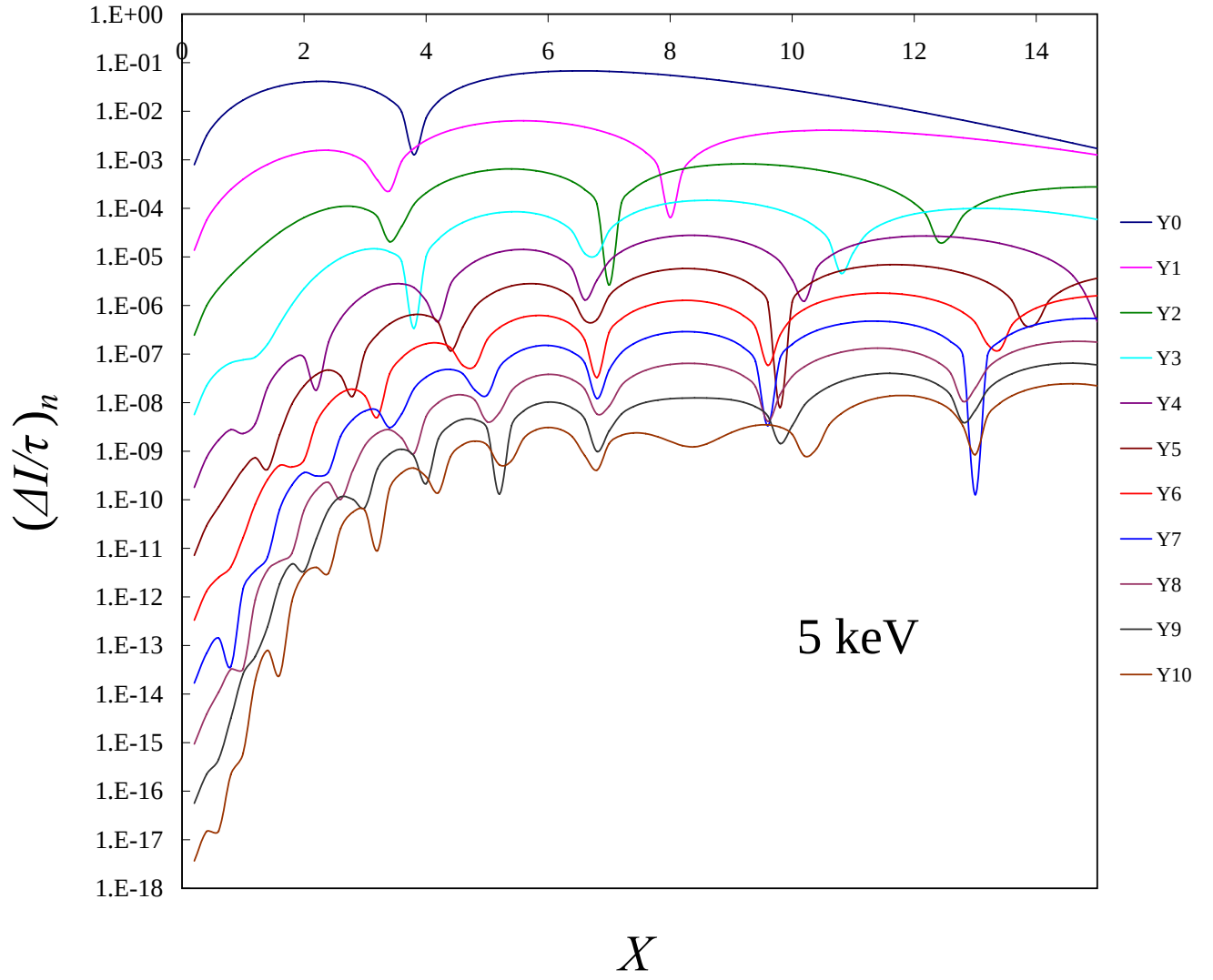


図 2.16: 電子温度 5 keV における $Y_0 \sim Y_{10}$ までの各項の強度変化への寄与。ただし、絶対値を取り、縦軸を対数とした。

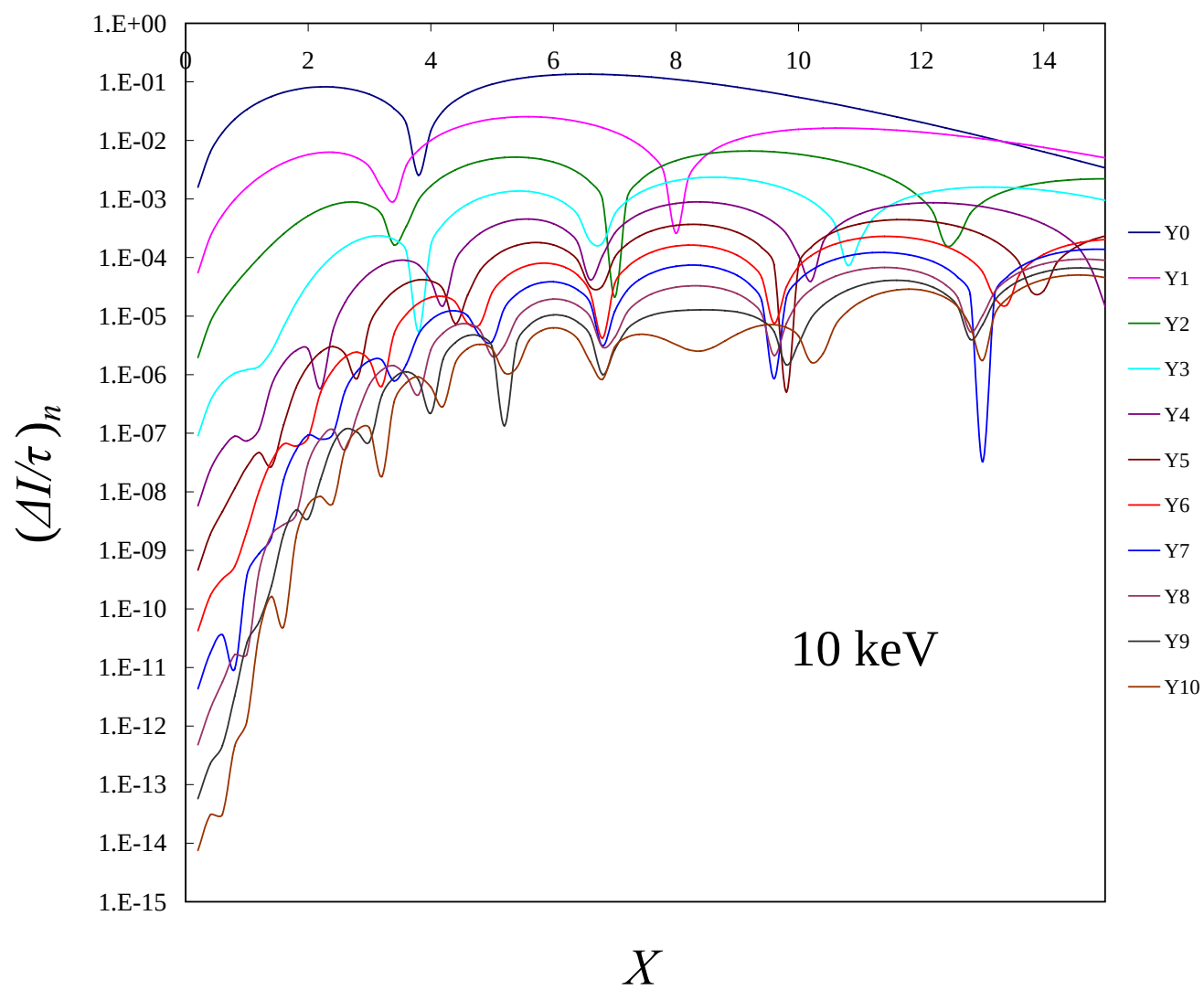


図 2.17: 図 2.16 と同じであるが、10 keV とした。

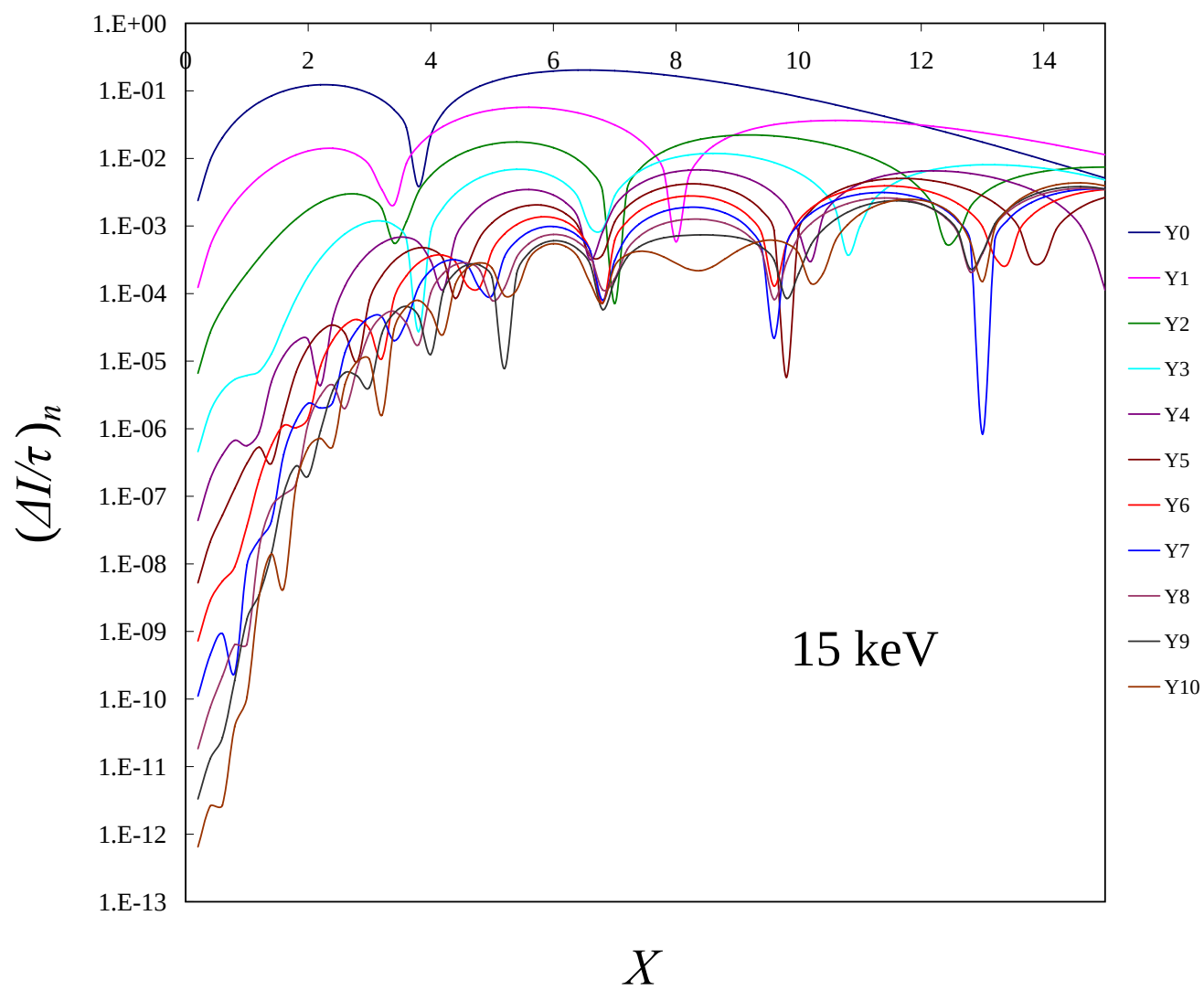


図 2.18: 図 2.16 と同じであるが、15 keV とした。

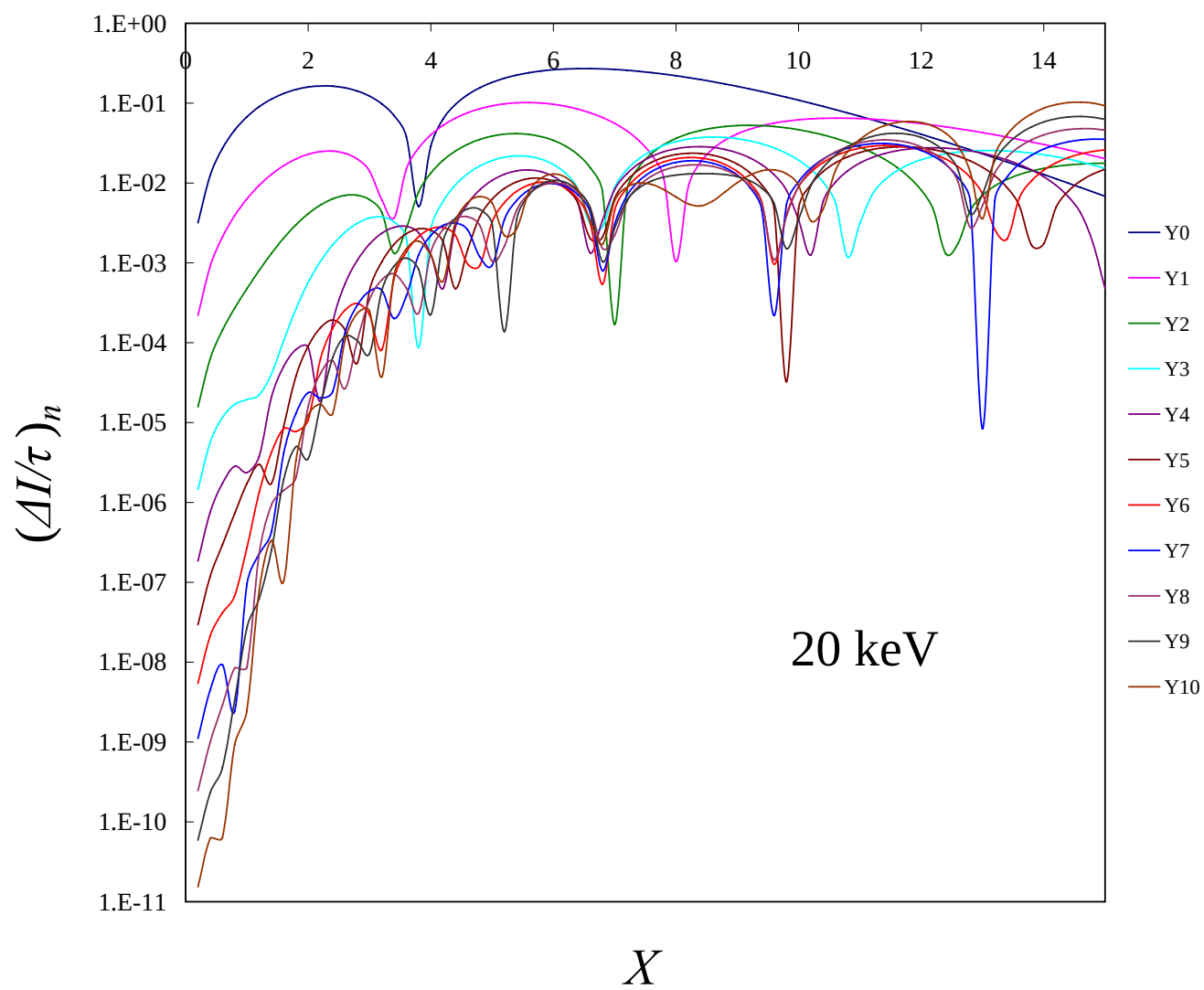


図 2.19: 図 2.16 と同じであるが、20 keV とした。

2.5 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のフィッティング式

ここまではスニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式の導出および数値積分を行ってきた。展開式の評価より、電子、光子のエネルギーが高くなるにつれ、精度が悪くなる傾向がみられることもわかった。実際の観測において、展開式は利用しやすいが、光子のエネルギーや、電子のエネルギーの高いところでの観測に用いると、理論的な誤差も多く含まれる事になってしまう。また、数値積分結果は、式の形で表すと実用的ではない。そこで、展開式に比べ格段に精度がよく、また観測にも用いやすいように、相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のフィッティング式を求める事にした。以前にも、野澤、伊藤、神山、川名 [36]、伊藤、坂本、草野、川名、野澤 [37] によって「最小二乗法標準プログラム SALS」を用いて厳密解と展開式の差を求める事でフィッティングが行われている。ここでは全く違う方法で、より高精度の結果を得たフィッティング式の導出と評価を行っていく。

さて、まずフィッティングの方法を説明していく。この方法は、展開式の振る舞いからヒントを得た。電子温度 20 keV のグラフを見ると、高周波数側で厳密解を中心とし、大きく振動している。その振動の仕方は、展開式の次数を一つ上げると、振動の向きが厳密解に対して逆の方向となり、振幅は、展開次数にほぼ比例して大きくなる。この事は、前節で述べたが、これらの考察から、それぞれの次数まで取ったものを上手く平均化すれば、振動の中心である厳密解を表せれるのではないかと考えられる。そこで、次のように

$$f_4 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right] \quad (2.69)$$

$$f_5 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 \right] \quad (2.70)$$

$$f_6 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 \right] \quad (2.71)$$

$$f_7 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 \right] \quad (2.72)$$

$$f_8 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 \right] \quad (2.73)$$

と定義する。これを次数の低い式から順に $f_4 \sim f_5$, $f_4 \sim f_6$, $f_4 \sim f_7$, $f_4 \sim f_8$ をそれぞれ平均

する。すると、

$$g_5 = \frac{f_4 + f_5}{2}, g_6 = \frac{f_4 + f_5 + f_6}{3}, g_7 = \frac{f_4 + f_5 + f_6 + f_7}{4}, g_8 = \frac{f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8}{5} \quad (2.74)$$

となる。この様にできた、(2.74) 式は、初めの5つの式から1つ減っている事が分かる。ここで g_n は、最も次数の高い項の影響を受けていると考え、展開式と同じ様に n が1 変われば、振動の向きが逆になっている。この行程を一つの関数になるまで繰り返し行くと、

$$h_6 = \frac{g_5 + g_6}{2}, h_7 = \frac{g_5 + g_6 + g_7}{3}, h_8 = \frac{g_5 + g_6 + g_7 + g_8}{4} \quad (2.75)$$

$$i_7 = \frac{h_6 + h_7}{2}, i_8 = \frac{h_6 + h_7 + h_8}{3} \quad (2.76)$$

$$j_8 = \frac{i_7 + i_8}{2} \quad (2.77)$$

となる。(2.69)～(2.76) 式を (2.77) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} j_8 &= \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right. \\ &\quad + \left(\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \right) \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \theta_e^5 Y_5 \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{3} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \right) \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} \right) \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \theta_e^6 Y_6 \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5} \right) \frac{1}{4} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \theta_e^7 Y_7 + \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2} \theta_e^8 Y_8 \right] \\ &= \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2689}{4320} \theta_e^5 Y_5 + \frac{529}{2160} \theta_e^6 Y_6 + \frac{89}{1440} \theta_e^7 Y_7 + \frac{1}{120} \theta_e^8 Y_8 \right] \quad (2.78) \end{aligned}$$

を得る事ができる。さて、この式のままだでもかなり精度のある式であるのだが、さらに精度を上げる為に次のように考えてみる。このように求められたフィッティング式も厳密解を中心として少しではあるが、振動している。その振動方向は最も次数の高い項の影響を受けると考えられる。つまり、 $Y_4 \sim Y_8$ を使って作った式、 $Y_5 \sim Y_9$ を使って作った式、 $Y_6 \sim Y_{10}$ を使って作った式は、一番目の式の振動方向に対して、二番目の式だけが逆向きになっ

ている。これを 1 : 2 : 1 の重みを付けて平均すればさらに振動を抑えられる。そこで残りの二つの関数

$$j_9 = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \frac{2689}{4320} \theta_e^6 Y_6 + \frac{529}{2160} \theta_e^7 Y_7 + \frac{89}{1440} \theta_e^8 Y_8 + \frac{1}{120} \theta_e^9 Y_9 \right] \quad (2.79)$$

$$j_{10} = \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \frac{2689}{4320} \theta_e^7 Y_7 + \frac{529}{2160} \theta_e^8 Y_8 + \frac{89}{1440} \theta_e^9 Y_9 + \frac{1}{120} \theta_e^{10} Y_{10} \right] \quad (2.80)$$

を用いると

$$\begin{aligned} f_{fit} &= \frac{j_8 + 2j_9 + j_{10}}{4} \\ &= \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \left(\frac{2689}{4320} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \theta_e^5 Y_5 \right. \\ &\quad + \left(\frac{529}{2160} \frac{1}{4} + \frac{2689}{4320} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \theta_e^6 Y_6 + \left(\frac{89}{1440} \frac{1}{4} + \frac{529}{2160} \frac{1}{2} + \frac{2689}{4320} \frac{1}{4} \right) \theta_e^7 Y_7 \\ &\quad + \left(\frac{1}{120} \frac{1}{4} + \frac{89}{1440} \frac{1}{2} + \frac{529}{2160} \frac{1}{4} \right) \theta_e^8 Y_8 + \left(\frac{1}{120} \frac{1}{2} + \frac{89}{1440} \frac{1}{4} \right) \theta_e^9 Y_9 + \frac{1}{120} \frac{1}{4} \theta_e^{10} Y_{10} \left. \right] \\ &= \frac{\tau\theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right. \\ &\quad + \frac{15649}{17280} \theta_e^5 Y_5 + \frac{2689}{4320} \theta_e^6 Y_6 + \frac{317}{1080} \theta_e^7 Y_7 + \frac{407}{4320} \theta_e^8 Y_8 + \frac{113}{5760} \theta_e^9 Y_9 + \frac{1}{480} \theta_e^{10} Y_{10} \left. \right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

となり、最終的なフィッティング式を求める事ができる。このフィッティング式の結果が図 2.20 である。これは、電子温度 20 keV の場合であるが、図 2.13 と比べてみると、厳密解ときれいにフィットしている事がわかる。また、元々の展開式や、以前作られたフィッティング式と比べたグラフが図 2.21, 2.22 である。20 keV の場合では、クロスオーバー周波数を除いて、ほぼすべての周波数で誤差 0.1% 以下とかなりの精度を持っていることがわかる。また、このクロスオーバー周波数においても、20 keV の場合、とっている点 (グラフは、 X について 0.2 きざみで作成) が他の温度と比べ、クロスオーバー周波数 ($X \approx 4.01$) に極めて近く、相対的誤差は少し大きくなっているが、実際の絶対誤差は、 $\approx 2 \times 10^{-5}$ とかなり小さいのである。

次に 15 keV の場合であるが、5 次までの展開式と比べると、全ての周波数で 2 桁程度の精度向上が見られる。また、以前のフィッティング式 [36] (適用範囲を $0.020 \leq \theta_e \leq 0.035, 2.4 \leq X \leq 15.0$ として係数を求めた物) と比べると広い領域で、1 桁程度の精度向上

が見られる。また、現在見つかった銀河団の温度は $\theta_e \leq 0.035$ であるので、20 keV の場合で、ある程度精度が保障されれば、フィッティング式として有用であると言える。先に述べた様に 20 keV の場合でも、広い領域で 0.1% 以下の誤差とかなり正確にフィットできている。元の展開式と比べると精度は、格段に上がったと言える。また、このフィッティング式は、光子数が保存している式を平均しただけであるので、最終的な式もちろん光子数が保存している事を付け加えておこう。この結果を使うとどれ程の効果があるかは、運動学的効果に触れる、次の章で述べる事にする。

最後に、この求め方は徐々に振動が大きくなっていく幾つかの関数について、その振動の中心を求める事ができる。例えば簡単な関数群 $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = -2f_1(x), f_3 = -2f_2(x) \cdots$ 等という 6 つの関数に同じ計算を行うと、振幅を約 1/100 にする事ができる。これは、図 2.23 で表した。

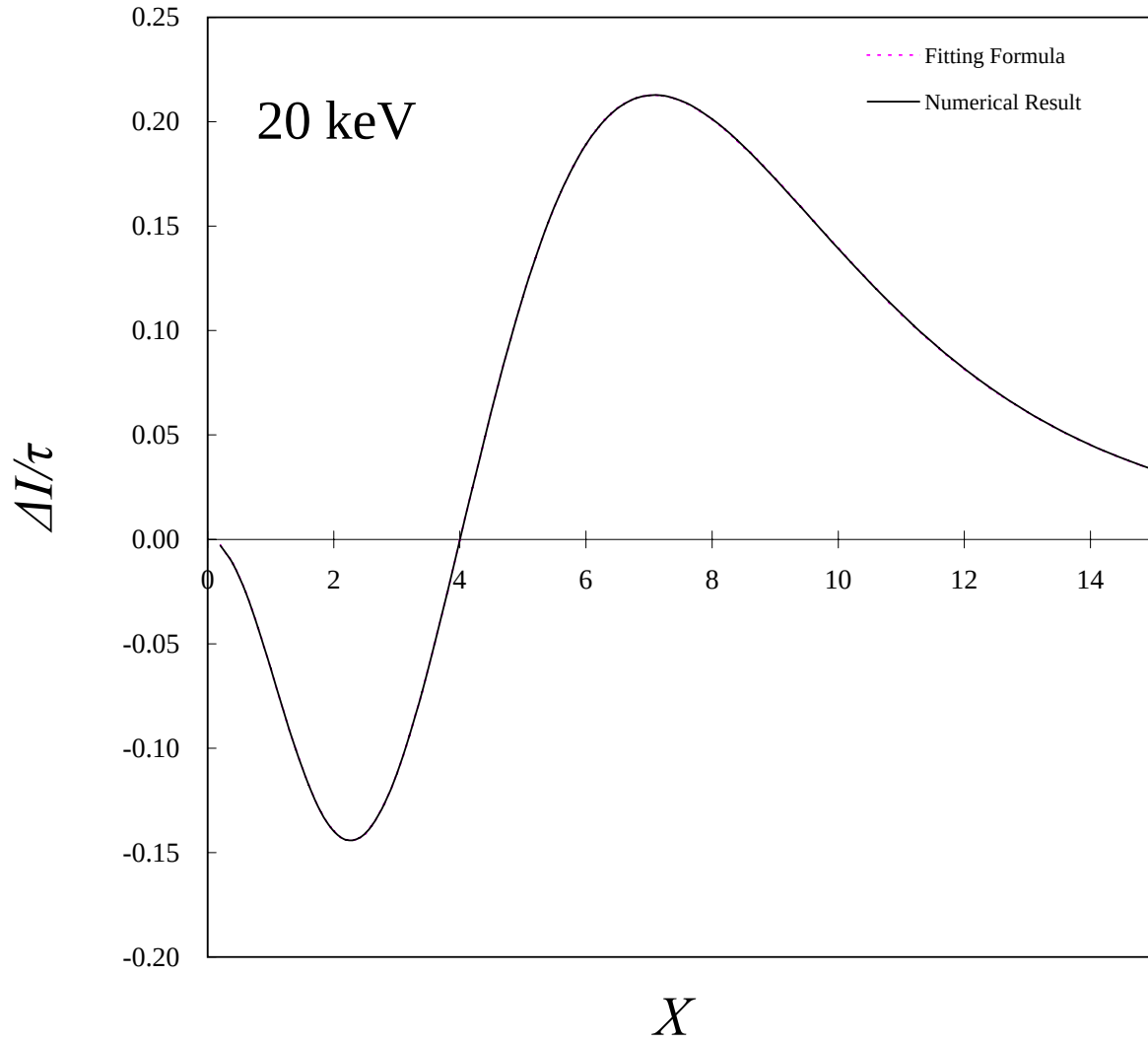


図 2.20: 電子温度 20 keV での相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフ。フィッティング式と厳密数値積分の結果を比較してある。

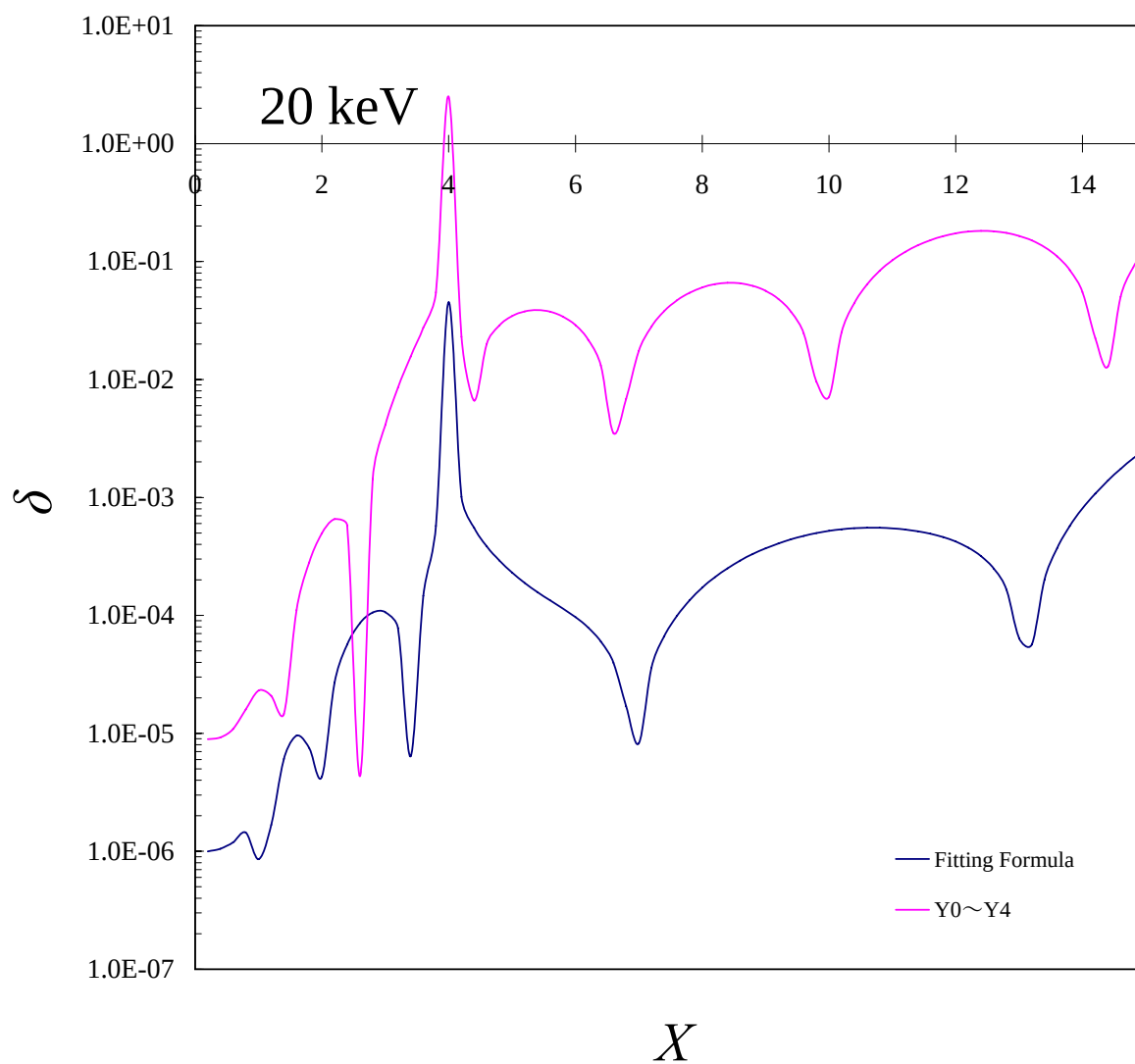


図 2.21: 図 2.20 での数値積分との相対誤差を表したグラフ。ここでは、 $Y_0 \sim Y_4$ までの展開式とフィッティング式を比較した。

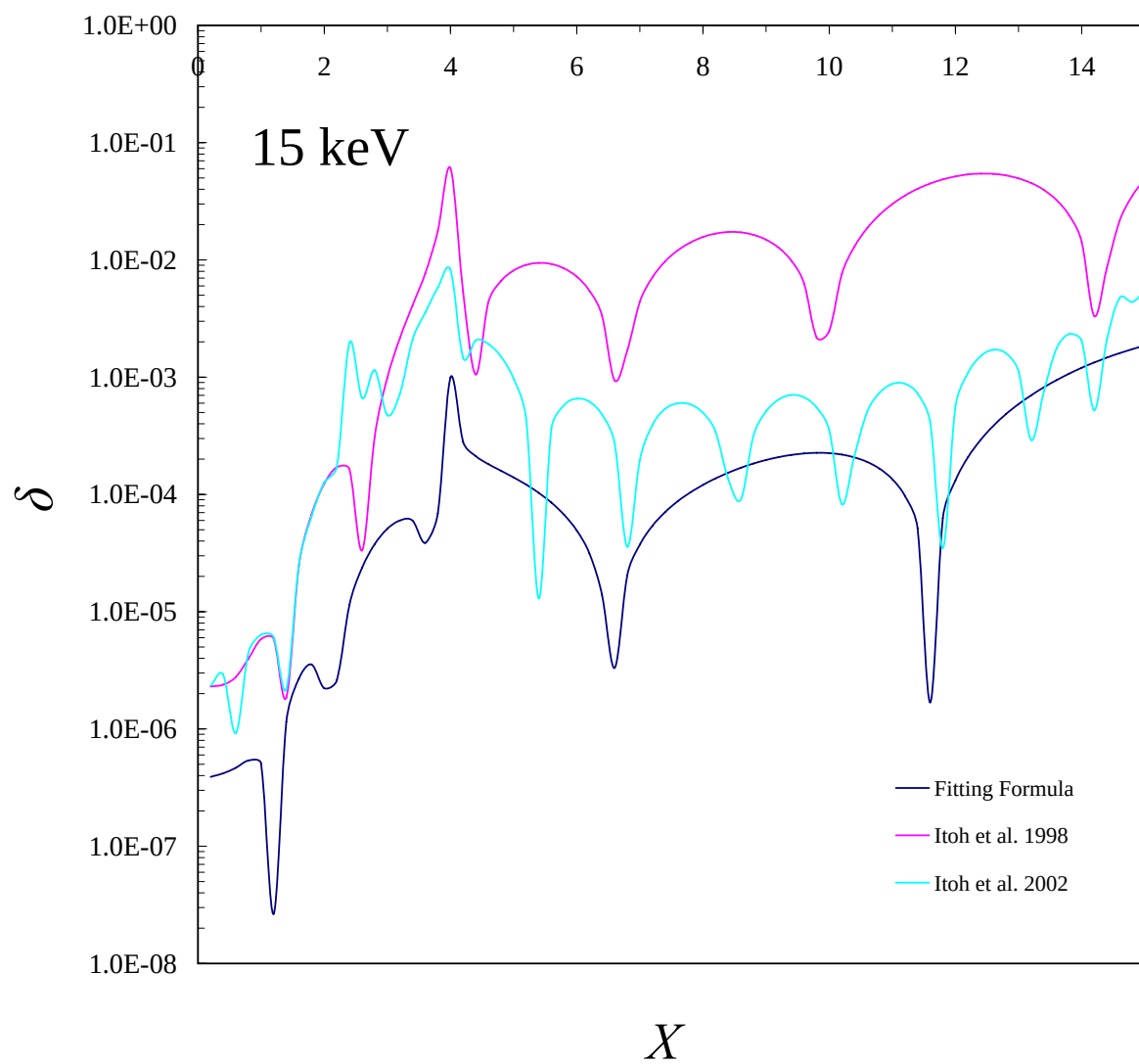


図 2.22: 図 2.21 と同じであるが、20 keV とした。また、比較の対象として以前求められたフィッティング式 [37] を追加した。

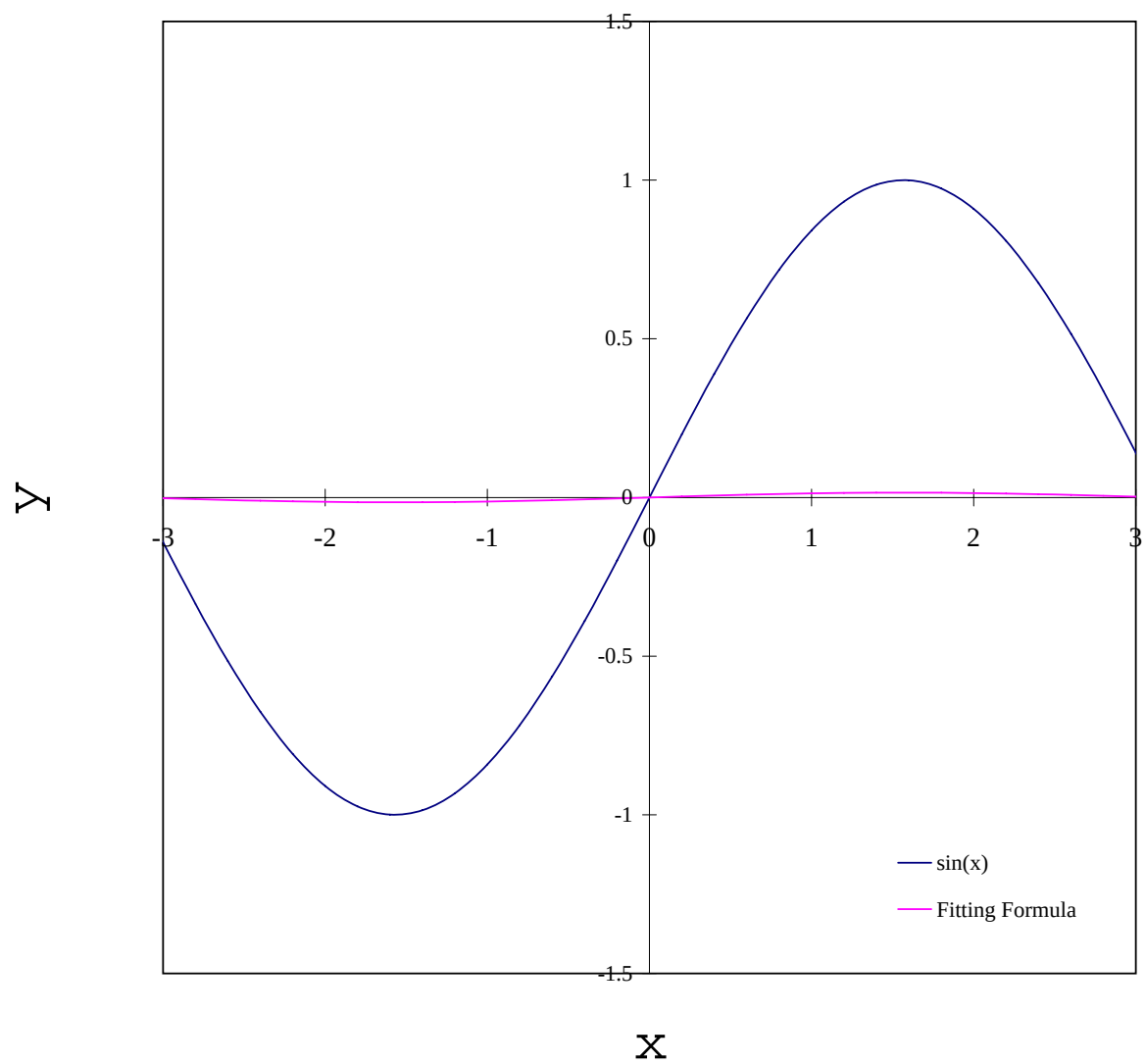


図 2.23: $y = \sin x$, $y = -2 \sin x$, $y = 4 \sin x \cdots$ という 6 個の関数を用いて、フィッティング式を求める時と同じ計算を行った結果。

2.6 多重散乱を考慮した熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

さて、今までは、銀河団中で光子が1回のみ散乱される場合を考えてきたが、入射光子が銀河団中で2回散乱される場合が、どれだけ影響するのかを調べることにした。ここでは、以前行われた、伊藤、川名、野澤、神山 [37] の計算を参考に導出した。

1回散乱された時のゆがみの効果は、高次の項まで考慮に入れると、

$$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10} \right] \quad (2.82)$$

で表される。これを、元々のボルツマン方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \{ n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (2.83)$$

の分布関数 $n(\omega)$ に摂動的にゆがみの効果を入れて、

$$\begin{aligned} n(X) &\equiv n_0(X) + \Delta n(X) \\ &= n_0(X) \left\{ 1 + \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \right\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

として代入する。これを1回散乱の時と同様に展開する。計算としては、(2.37) 式中の n に(2.84) 式を代入する事で求まる。結果として、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \frac{\tau \theta_e X e^X}{e^X - 1} \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 + \theta_e^5 Y_5 + \theta_e^6 Y_6 + \theta_e^7 Y_7 + \theta_e^8 Y_8 + \theta_e^9 Y_9 + \theta_e^{10} Y_{10} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \theta_e^2 X e^X}{e^X - 1} \left[Z_0 + \theta_e Z_1 + \theta_e^2 Z_2 + \theta_e^3 Z_3 + \theta_e^4 Z_4 + \theta_e^5 Z_5 + \theta_e^6 Z_6 + \theta_e^7 Z_7 + \theta_e^8 Z_8 + \theta_e^9 Z_9 + \theta_e^{10} Z_{10} \right] \end{aligned} \quad (2.85)$$

として展開式が得られる。ここで $Z_0 \sim Z_{10}$ の各項に関しては付録 A を参照してもらいたい。(2.85) 式は1回散乱の項と2回散乱の項の足し合わせになっており、 Z_n で表されている後ろの項が、2回散乱の効果を表す。また、実際に観測で得られる量は足し合わさった合計である。

さて、2回散乱の項に現れる τ^2 の項であるが、これは、

$$\sigma_T \int_0^l dl N_e(l_1) \times \sigma_T \int_0^{l_1} dl_2 N_e(l_2) = \frac{1}{2} \left[\sigma_T \int_0^l dl_1 N_e(l_1) \right]^2 \quad (2.86)$$

の関係を用いた。以上が2回散乱の展開式である。

では、2回散乱の数値積分はどうなるかという、時間発展方程式にゆがみを考慮した分布関数、(2.84) 式を代入して整理した、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ n_0(\omega)[1 + n_0(\omega')] - n_0(\omega')[1 + n_0(\omega)] e^{\Delta x} \right\} \\ & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ n_0(\omega') \frac{\Delta n(\omega')}{n_0(\omega')} \left[n_0(\omega) (1 - e^{\Delta x}) - e^{\Delta x} \right] \right. \\ & \left. + n_0(\omega) \frac{\Delta n(\omega)}{n_0(\omega)} \left[1 + n_0(\omega') (1 - e^{\Delta x}) \right] \right\} \quad (2.87) \end{aligned}$$

を用いて計算していく。計算する過程で、 $\Delta n(\omega')/n_0(\omega')$ の項が面倒になる。 $\Delta n(\omega)/n_0(\omega)$ であれば、計算する周波数が決まっているため、あらかじめ計算して、代入すれば問題ない。しかし、 ω' である為、どの周波数での歪みが必要になるかは、実際に計算しなければならない。その為、熱的効果の場合、4重積分で数値計算する事が可能であるが、この項の為に4重積分を2回計算しなくてはならなくなってしまい、結果として8重積分の計算となってしまう。現在の計算機では、この計算は精度を上げようとするとかなりの時間を要する(1回散乱の時の精度を保って行おうとすると、少なくとも数十年かかる)。そこでこの項の計算には、前節で求めた展開式を代入して近似的に計算する。

数値計算を行う際、 X の非常に大きな所まで取る必要がある。電子温度が高い ($\theta_e = 0.03$) 場合、 $X \simeq 40$ でゆがみの大きさは 10^{-5} (熱的効果のピークの値に対して 10^{-4} 程度) 以下である。また、この周波数でのフィッティング式の誤差は、20% 程度である。これ以降の周波数では歪みの大きさは、指数関数的に小さくなっていく (X が10増えるのに対して一桁)。以上の事を考慮すると結果として、この展開式を代入する事で、数値計算に対する影響は温度が高い場合に対しても、ほとんど無視できると考えられる。よって、 $\Delta n(\omega')/n_0(\omega')$ の計算の際、近似的に展開式による歪みを代入して計算を行った。

さて、2回散乱を考える上でも、散乱前後での光子数が変化しない事が重要になってくるが、

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (2.88)$$

を用いて光子数の変化を求めると、解析的に0になる事が確認できる。

さて、ここで、実際に観測されるのは強度変化であるので、1回散乱同様、プランクの黒体輻射の式より、

$$\Delta I \equiv \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (2.89)$$

と定義し、実際どのような振る舞いをするか、図 2.24～2.27 に表した。ここでは、2 回散乱の項による強度変化を ΔI_2 とおいてある。まずは、温度による違いを見ると、2 回散乱の効果は、温度依存性が強いと言える。これは、 Z_0 の項に注目すれば、1 回散乱が θ_e に比例していた事に比べ θ_e^2 に比例している事からも理解できる。よって、温度が高い程、2 回散乱の影響が大きくなると言える。次に電子温度 5 keV の場合に注目すると、 $X \leq 20$ の領域で数値積分の結果と良く一致している。数値積分との相対誤差を取ったグラフを見れば、0.1%以下の誤差とかなり良い精度である事が分かる。しかし、10 keV と温度が上がると、収束が非常に遅くなることが分かる。ここでも、1 回散乱の場合と似た振る舞いをしており、高温または高周波数になるにつれて、振動が大きくなっている。ここで、1 回散乱と似たような関数をしている事から、同じフィッティング式を用いてみることにする。つまり係数をそのまま、2 回散乱の展開式に当てはめ、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} = & \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \theta_e^2 X e^X}{e^X - 1} \left[Z_0 + \theta_e Z_1 + \theta_e^2 Z_2 + \theta_e^3 Z_3 + \theta_e^4 Z_4 \right. \\ & \left. + \frac{15649}{17280} \theta_e^5 Z_5 + \frac{2689}{4320} \theta_e^6 Z_6 + \frac{317}{1080} \theta_e^7 Z_7 + \frac{407}{4320} \theta_e^8 Z_8 + \frac{113}{5760} \theta_e^9 Z_9 + \frac{1}{480} \theta_e^{10} Z_{10} \right] \end{aligned} \quad (2.90)$$

として図 2.28～2.32 に表した。その結果、10 keV の場合は、ほぼ全ての周波数で誤差 1%以内の精度となった。また 15 keV の場合、展開式のグラフが図 2.30 になるが、振動が激しすぎて、図の中に収まっていない。実際は、 $Z_0 \sim Z_{10}$ まで取った展開式になると、1 程度のオーダーまで振動している。これは、厳密解での値の 100 倍にもなっている。この様に振動が大きくても、フィッティング式を用いると、図 2.31 の様にほぼ厳密解に一致している事が分かる。1 回散乱程の精度は無いが、かなりの良い近似になっている事からフィッティング式に応用性がある事がわかる。

ここで、2 回散乱の効果がどの程度効くのかを調べてみる。図 2.33 は、15 keV の時の 1 回散乱と 2 回散乱の効果を比較したものである。2 回散乱の効果は、1 回散乱に比べ、 $(\tau \theta_e)$ が一つ多くかかっているので、図の 2 回散乱のグラフは、100 倍大きな歪みにしたものと考えれば、ちょうど良いだろう。2 回散乱の効果は、 $\tau = 0.01$ とすると、一万個に一個程度の光子しか散乱されない事になる。実際に、 $\tau = 0.01$ とすると 2 回散乱の効果が最も大

きくなる、高温 (15 keV) の場合で $X = 5$ の領域でも 1 回散乱の歪みに比べ 0.2% 程度である。また、将来的に観測が行われる、高周波数側では、1 回散乱による歪みが小さくなるので 0.5% 程の効果が現れる。

最後にここでも、 $Z_0 \sim Z_{10}$ が単独では、どのような関数になっているのかを確認しておこう。ここで、 Z_n が与える強度変化を、

$$(\Delta I_2)_n = \frac{X^3}{e^X - 1} \left(\frac{\Delta n}{n_0} \right)_{2,n} \quad (2.91)$$

$$\left(\frac{\Delta n}{n_0} \right)_{2,n} = \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \theta_e^2 X e^X}{e^X - 1} [\theta_e^n Z_n] \quad (2.92)$$

と定義する。これらの結果が、図 2.34、2.35 である。1 回散乱の時と比べると、

- 温度依存性が、 $(\theta_e/0.01)^{n+2}$ である。
- Z_0 の項の振動の様子が Y_1 と似ている。
- n の増加に対する最大振幅の減少が緩やかである。

という事が挙げられる。また、1 回散乱の時と同様に強度変化の絶対値をとり縦軸を対数で表したグラフが図 2.36～2.38 である。5 keV の時であっても、 $X = 15$ で $n = 0$ と $n = 10$ のグラフの間隔が狭い事が分かる。つまり、展開式の精度が高くなりにくい事を意味する。15 keV の場合を見ると $n = 10$ のグラフが $n = 0$ のグラフと比べ約 100 倍とはるかに大きな振動をしている事が分かる。また、ここで 1 回散乱の場合と同様に数値積分の精度を確認すると 10^{-5} 程度である事が分かる。

2.7 まとめ

この章では、まず、相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式を導出した。その結果、銀河団の温度領域では、相対論補正が無視できない程の効果を持つ事を確認した。また、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果が無くなるクロスオーバー周波数を観測すれば、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測する事が出来ると期待できる。運動学的効果は、熱的效果に比べ桁程度小さな観測量となるので、解析精度を上げるためにも、熱的效果の理論式の誤差を出来るだけ小さくする必要がある。その為、熱的效果の展開式の振る舞いを知る必要があり、さらに高次の項まで計算しその振る舞いを調べた。その結果、

高温、高周波数になるに従って、徐々に振幅が大きくなる振動関数である事が分かった。この計算の結果から、今回用いた展開計算の収束限界が $T_e = 15 \text{ keV}$ である事が明らかになった。また、展開式の振る舞いから、フィッティング式を導出し、現実的な温度と観測領域において誤差 0.1% 以下という高精度の式を導出する事ができた。これを用いる事で、簡単により正確なゆがみを計算する事ができる。

次に 2 回散乱の効果を調べてみた。この効果は、光学的深さや電子温度など、現実的な銀河団のパラメータを考慮すると、かなり小さい値になる事が予想ができる。実際の結果としては、大きく見積もっても、1 回散乱と比較して 10^{-3} 程度の影響であり、このゆがみが必要とされるまでに観測精度が向上するのは、かなりの時間を要するだろう。また、2 回散乱の計算を通して、独自に導出したフィッティング式の応用性も確認する事ができた。

現在の大きな課題として、運動学的効果の観測があるので、その理論計算も次の章で触れておく。

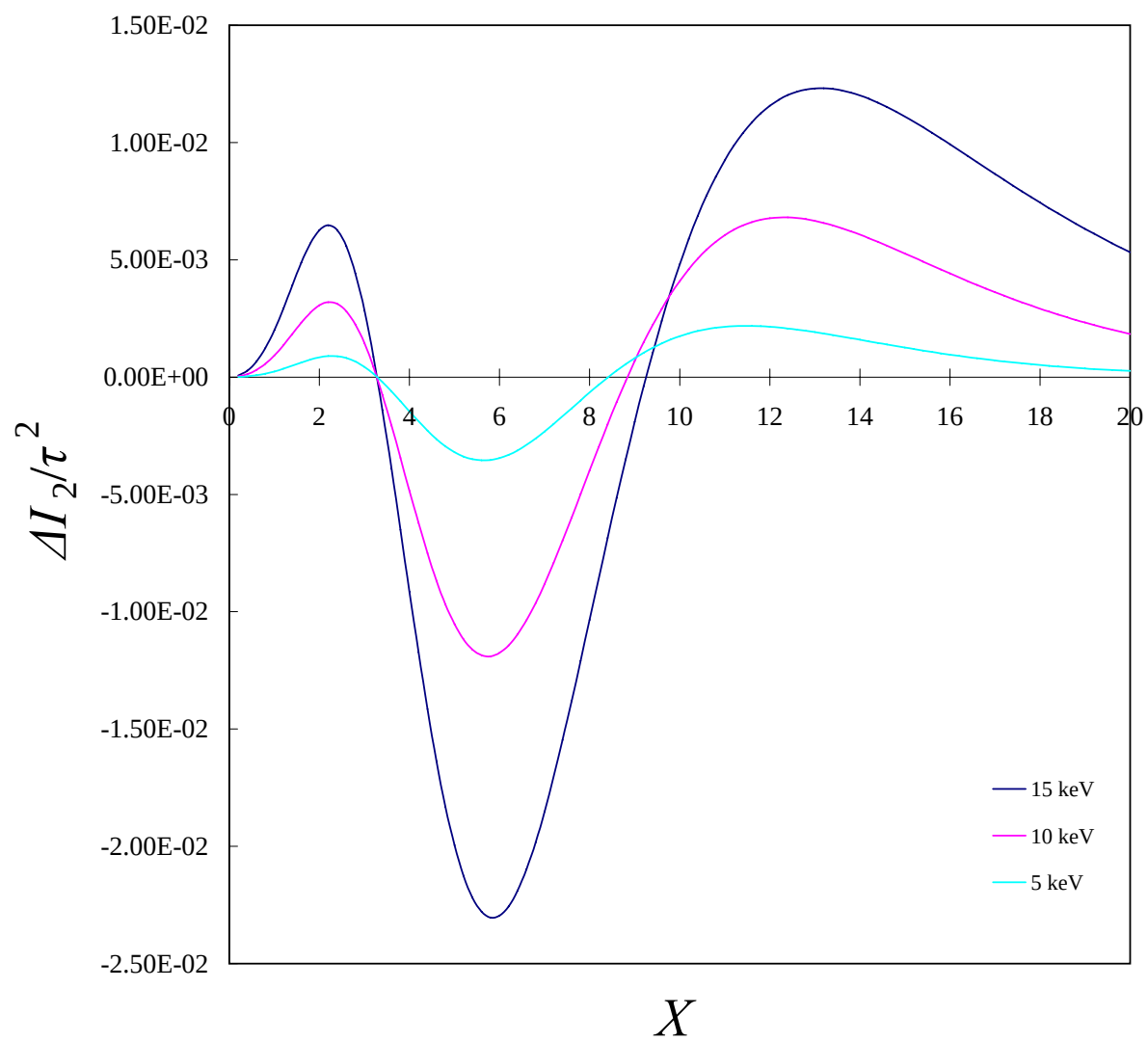


図 2.24: 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の二回散乱による寄与を示すグラフ。5, 10, 15 keV を比較した。

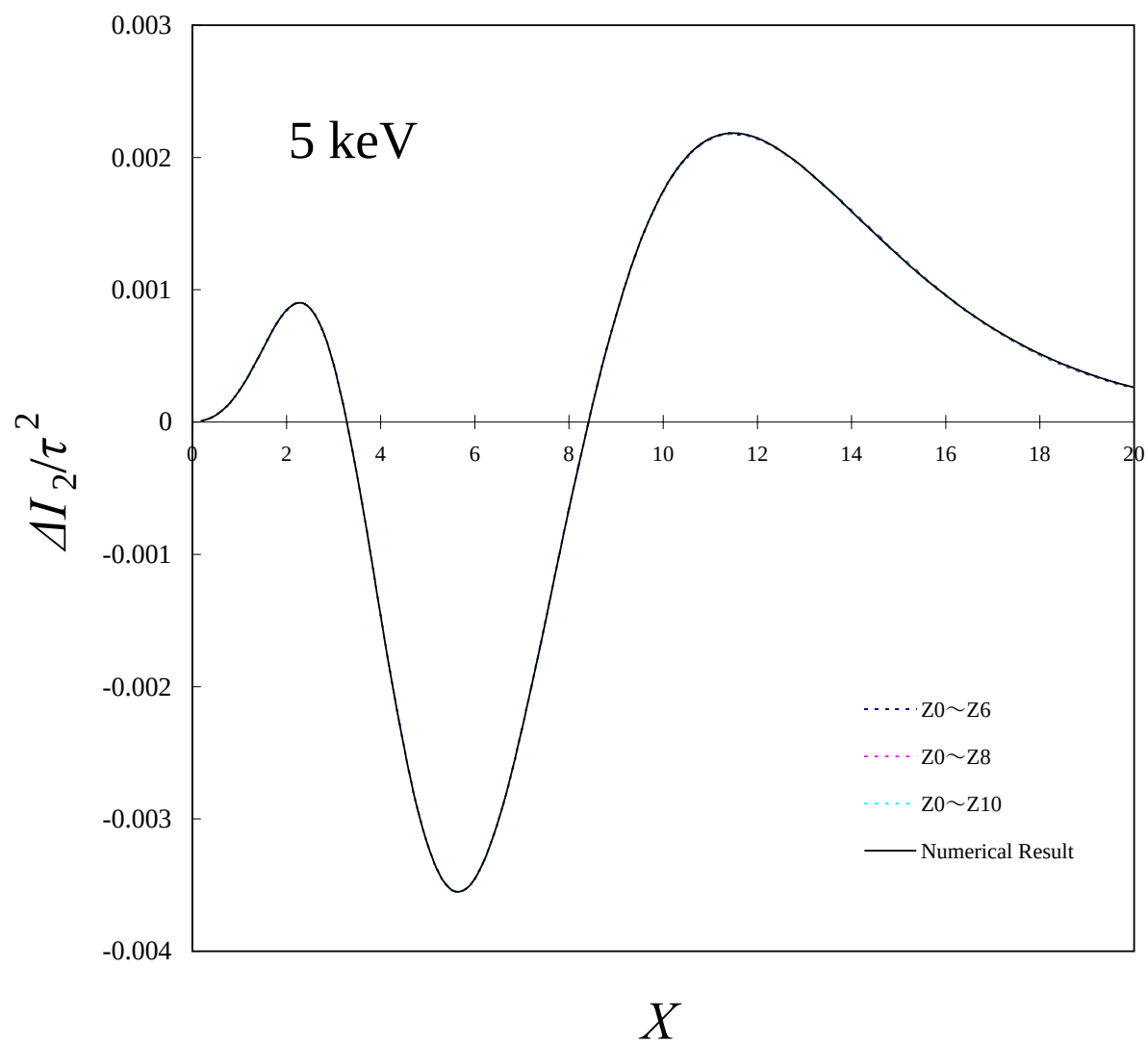


図 2.25: 電子温度 5 keV の場合の、2 回散乱の数値積分結果と展開式の比較。相対論的スニャエフゼルドビッチ効果の数値積分と展開式のグラフ。実線が数値積分を表す。

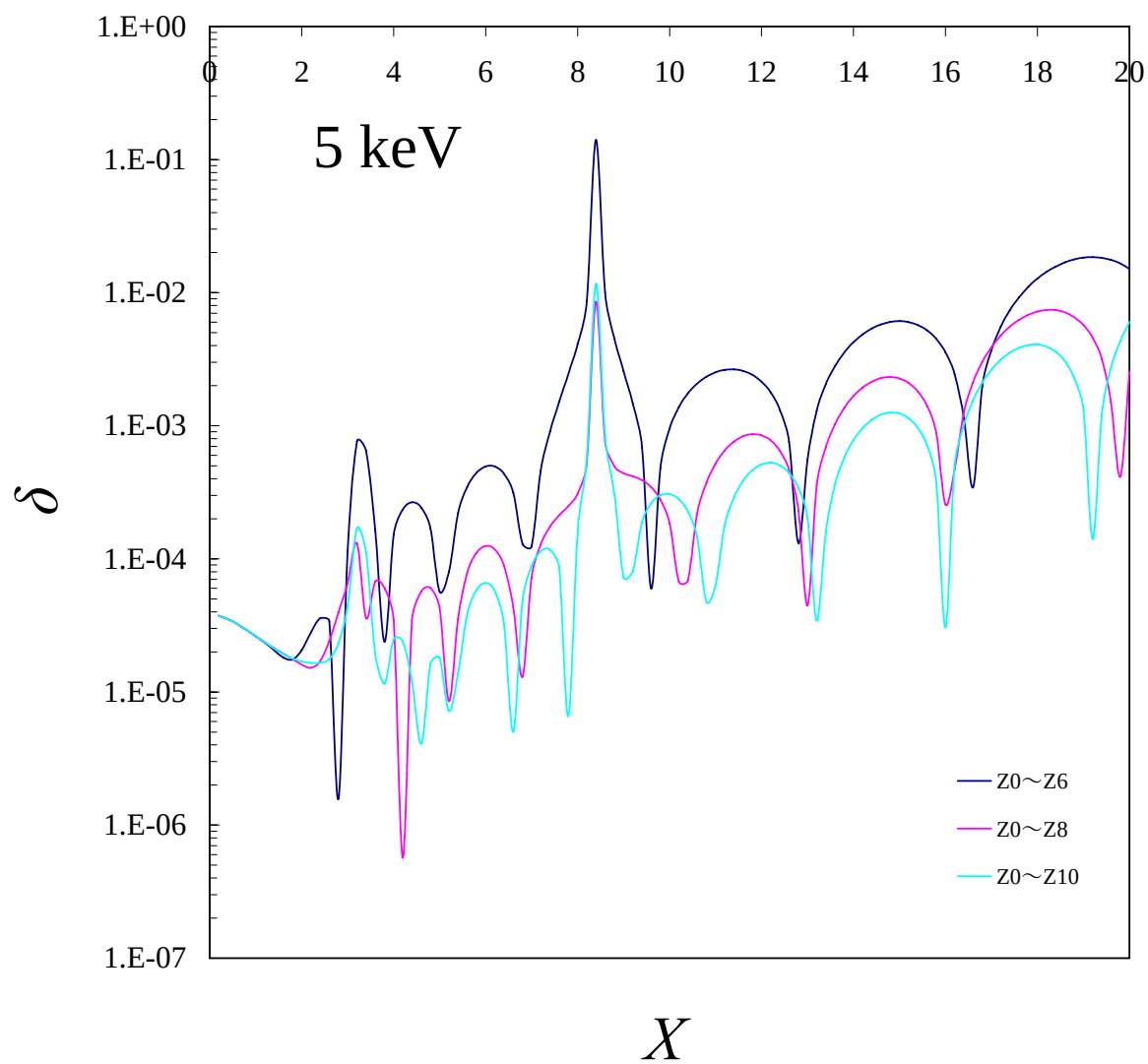


図 2.26: 図 2.25 で展開式と数値積分の相対誤差を表したグラフ。比較する展開式は、それぞれ $Z_0 \sim Z_6$, $Z_0 \sim Z_8$, $Z_0 \sim Z_{10}$ である。

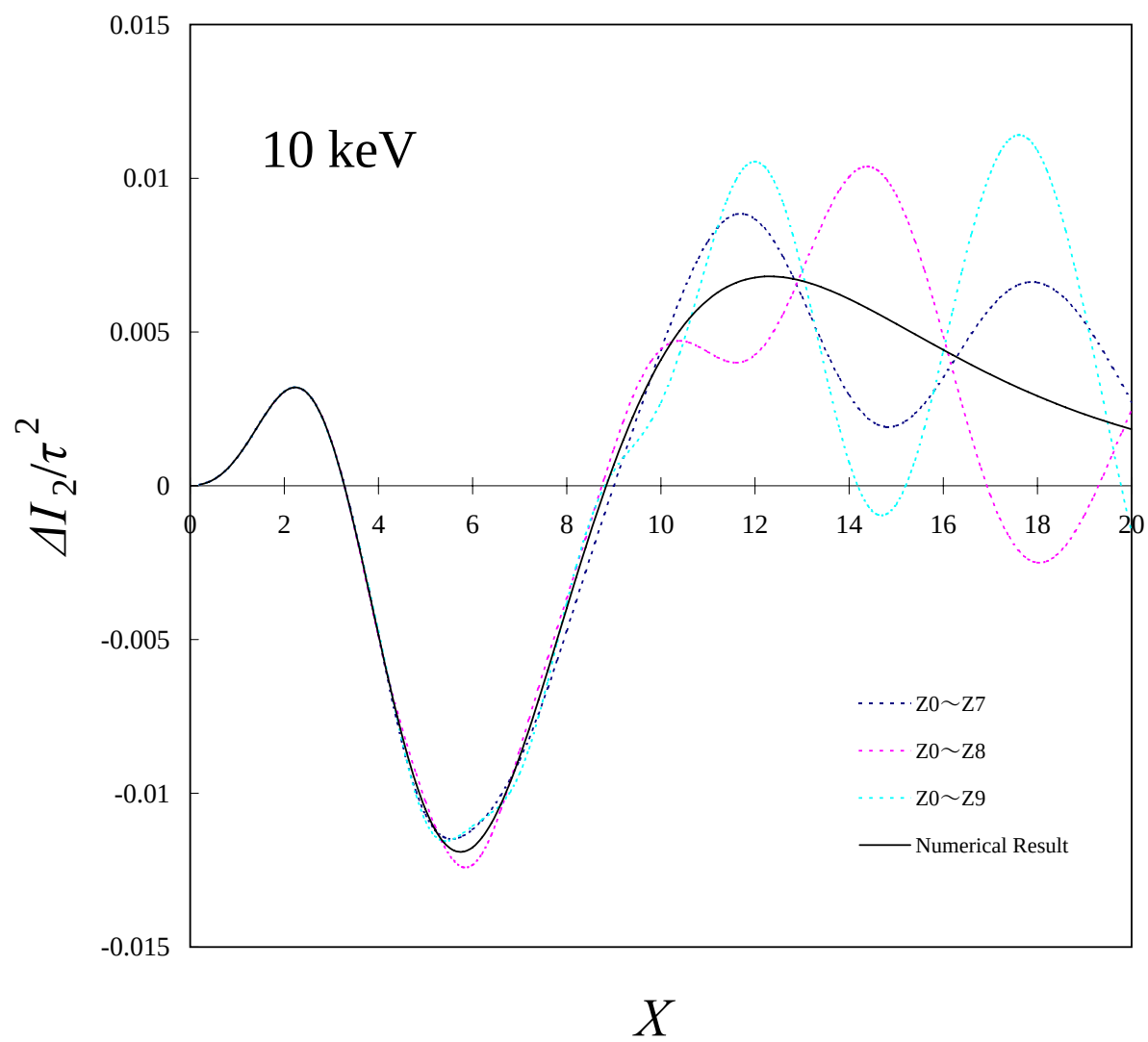


図 2.27: 図 2.25 と同じであるが、10 keV とした。

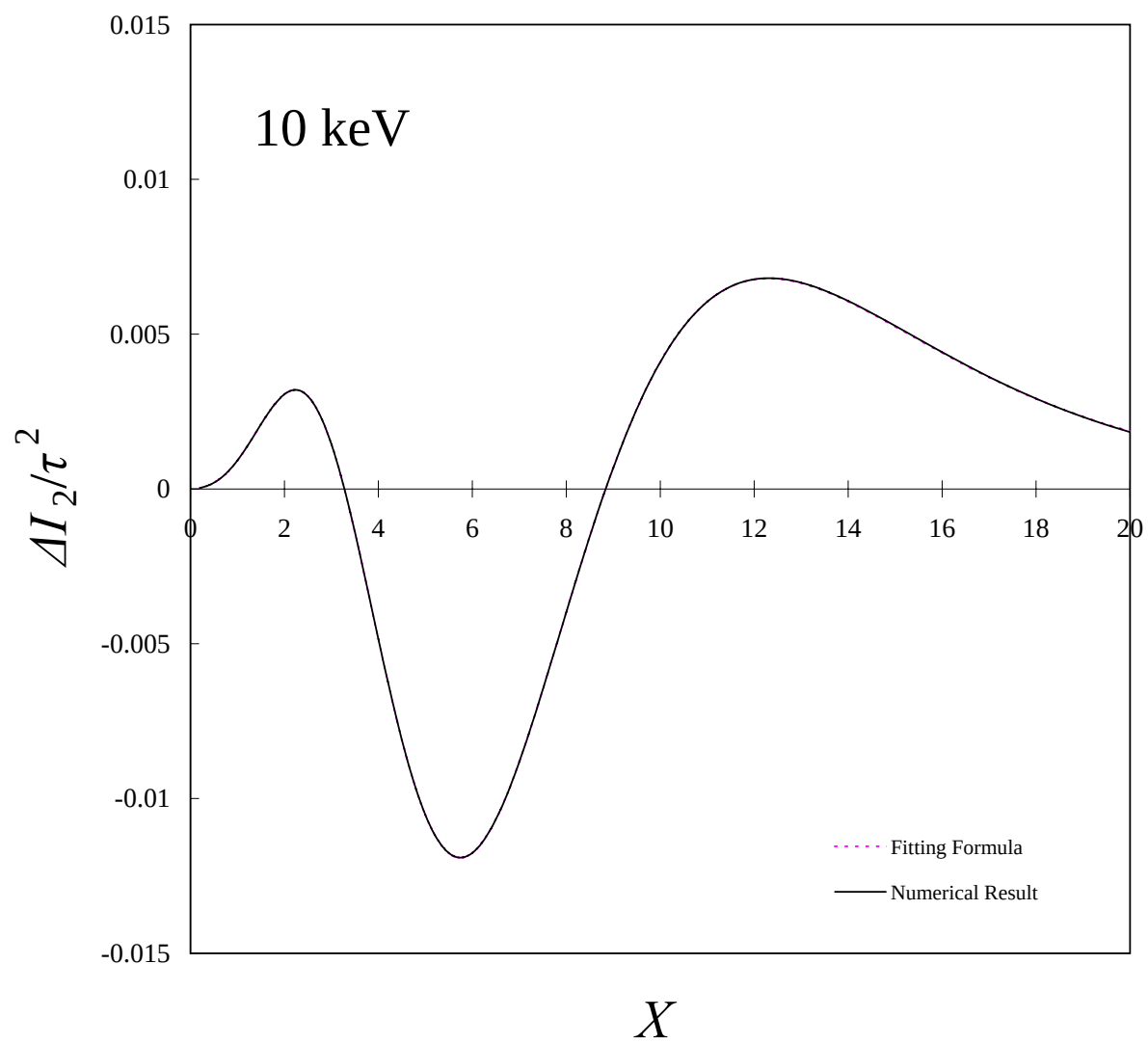


図 2.28: 図 2.27 と同じであるが、数値積分と比較する対象をフィッティング式とした。

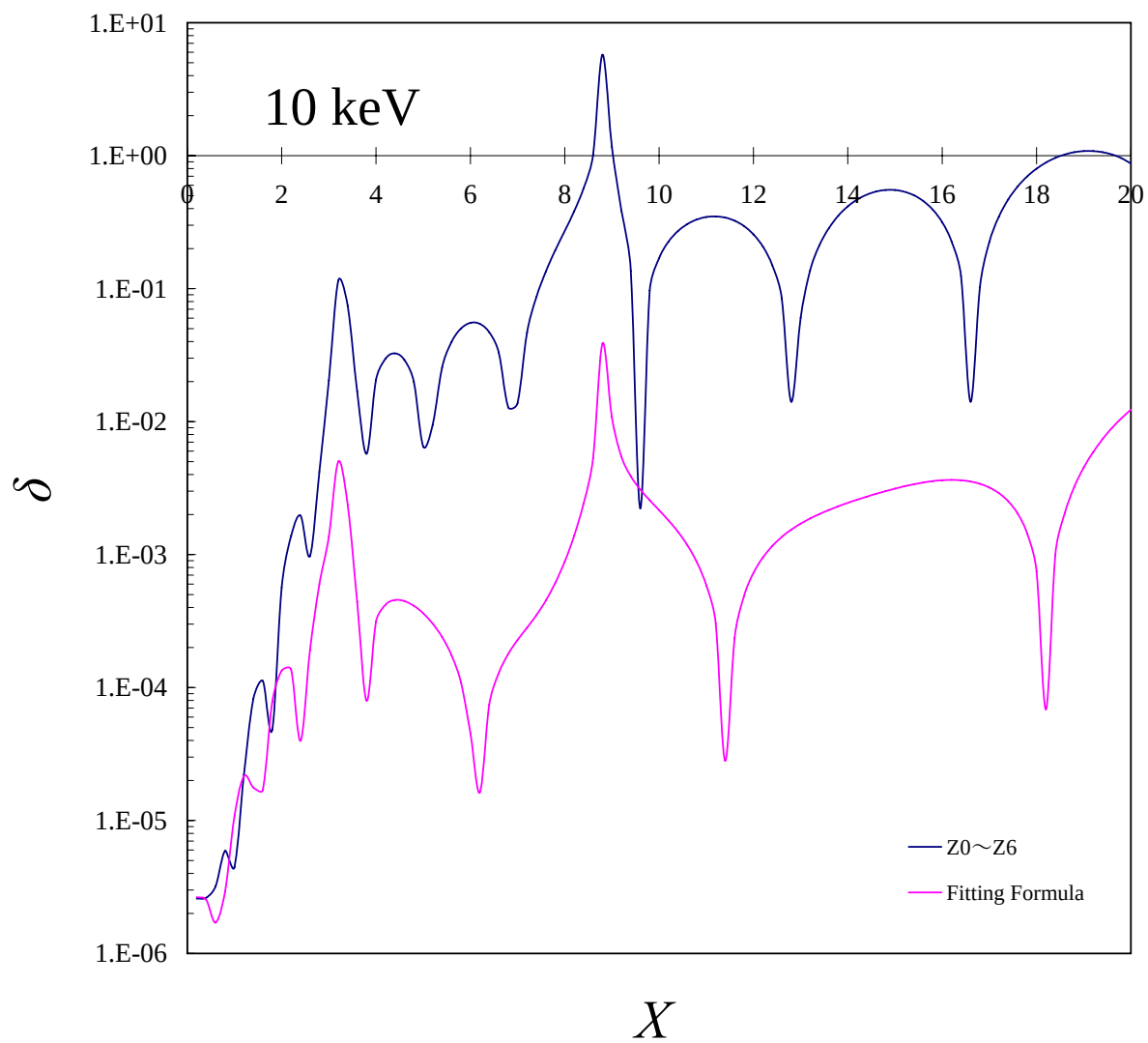


図 2.29: 図 2.28 でのフィッティング式と数値積分の相対誤差を表したグラフ。比較の対象として $Z_0 \sim Z_6$ の展開式の相対誤差も入れた。

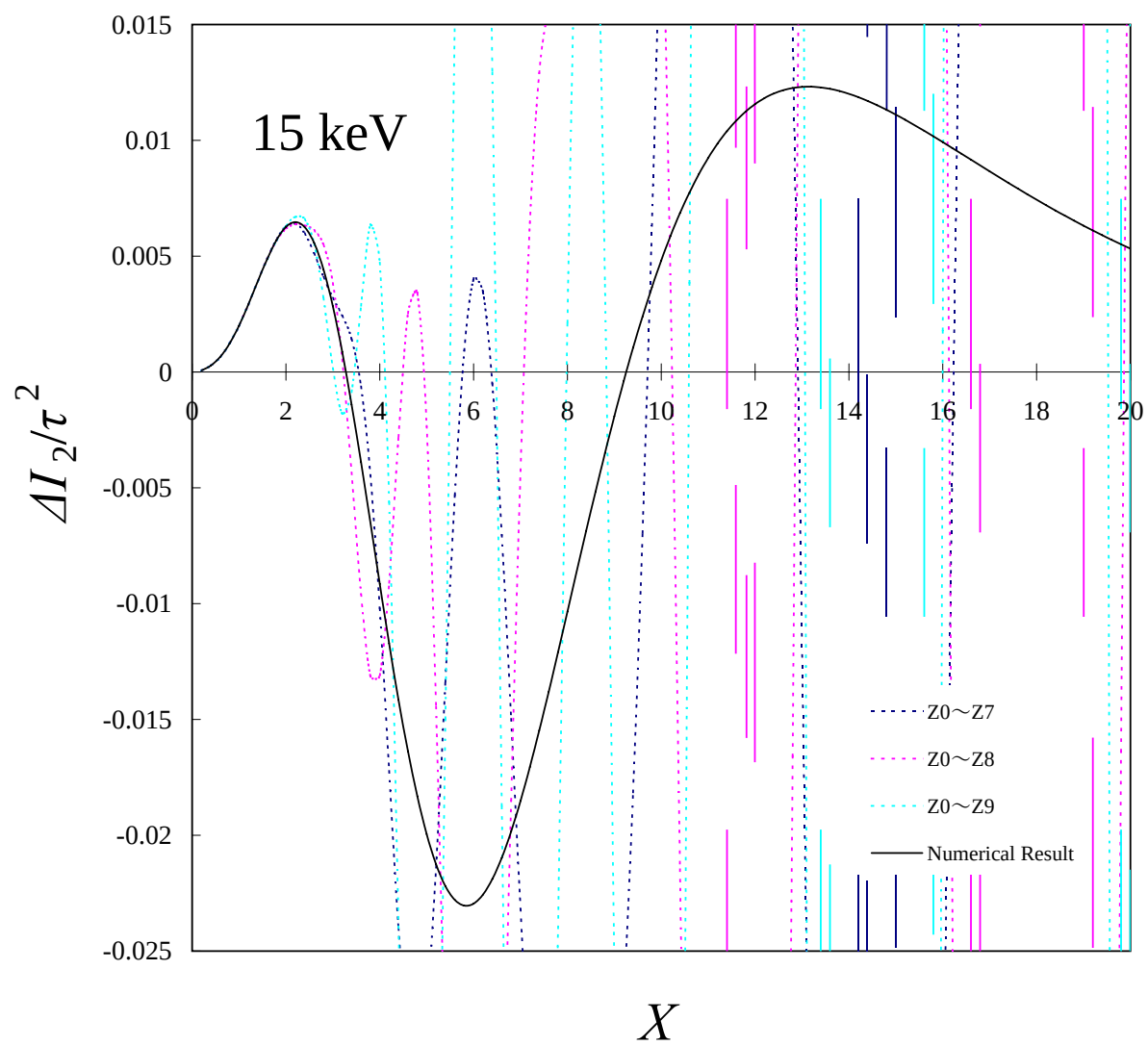


図 2.30: 図 2.27 と同じであるが、15 keV とした。

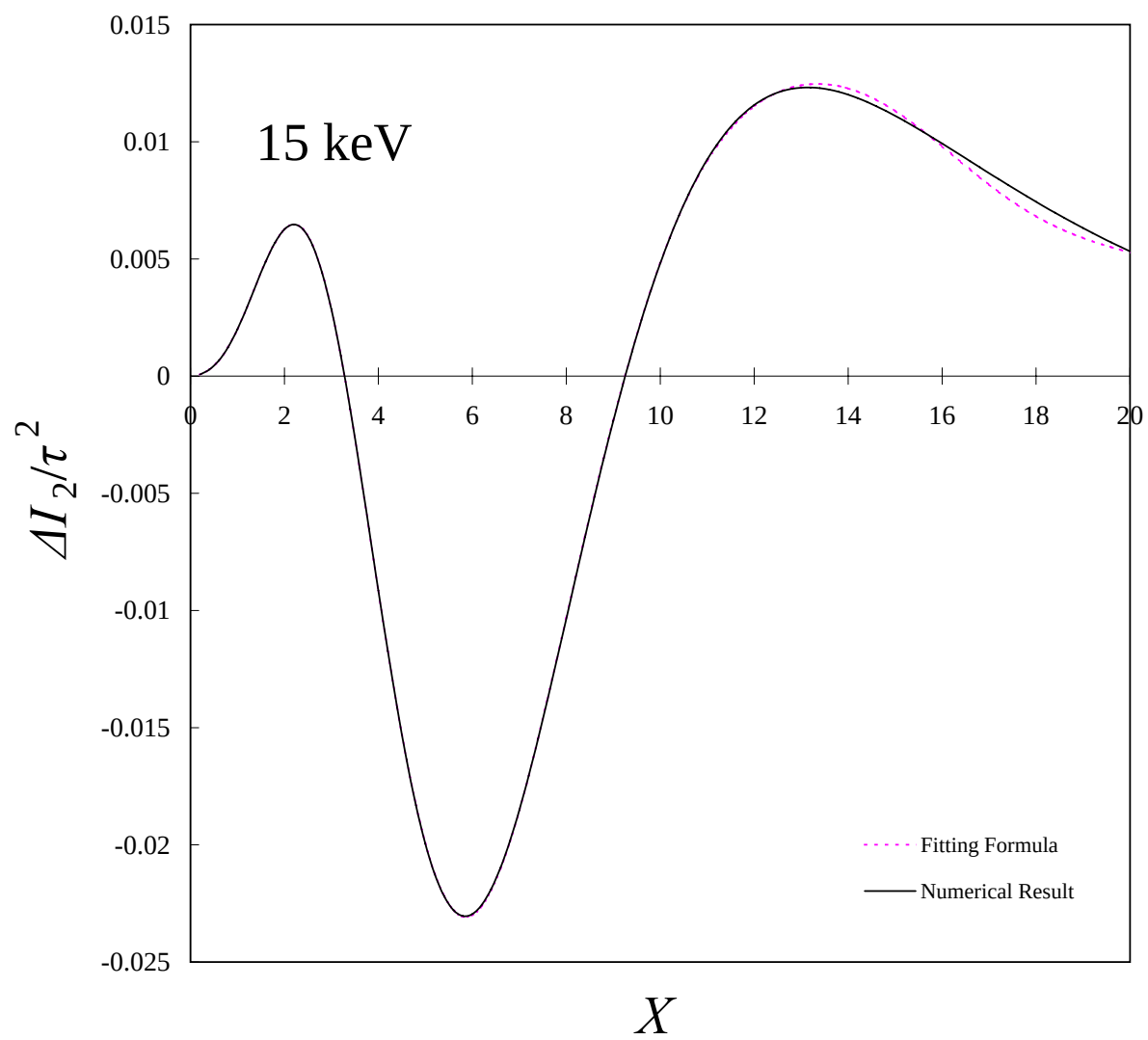


図 2.31: 図 2.28 と同じであるが、15 keV とした。

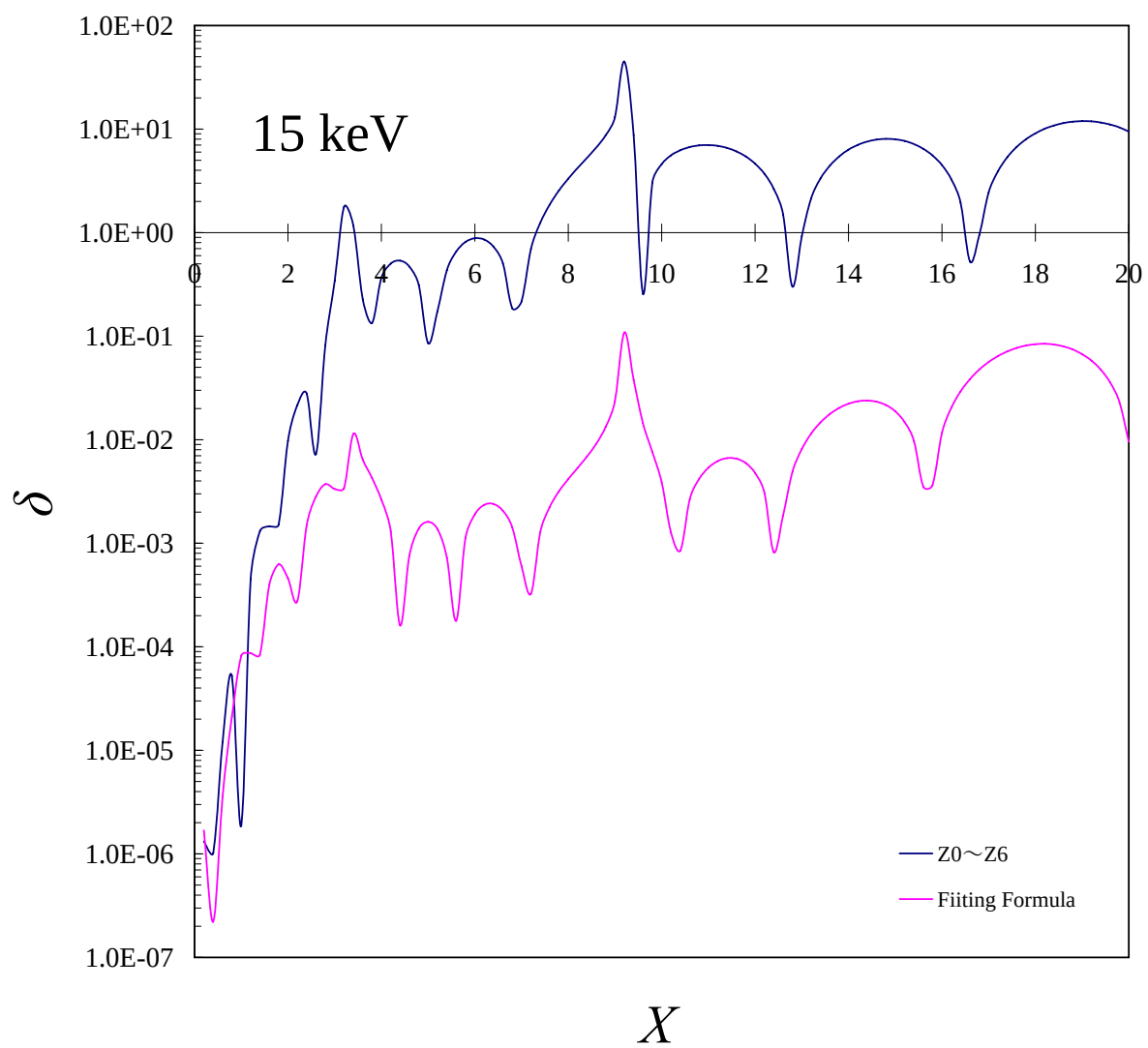


図 2.32: 図 2.29 と同じであるが、15 keV とした。

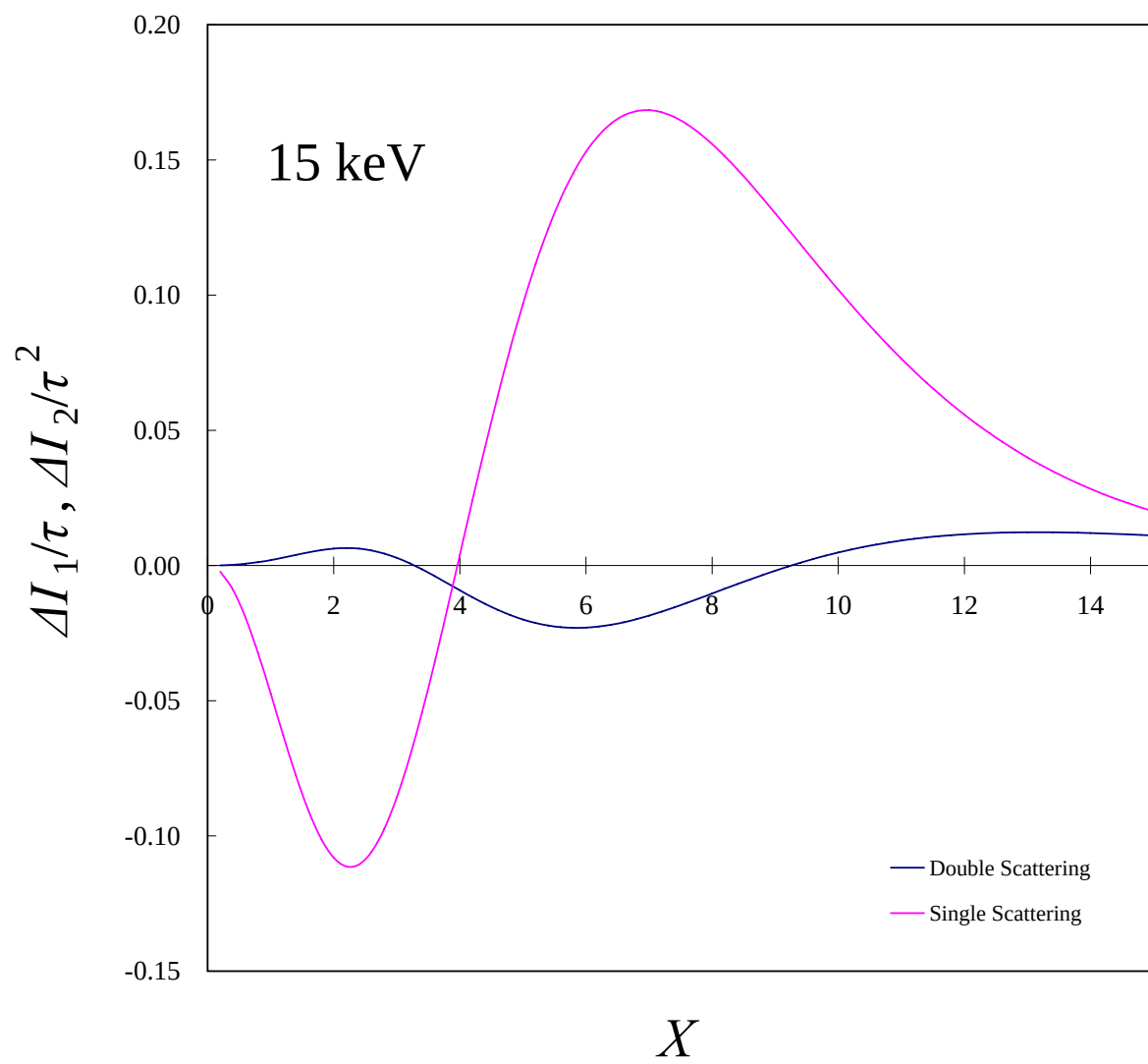


図 2.33: 電子温度 15 keV における熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の 1 回散乱と 2 回散乱の強度変化。

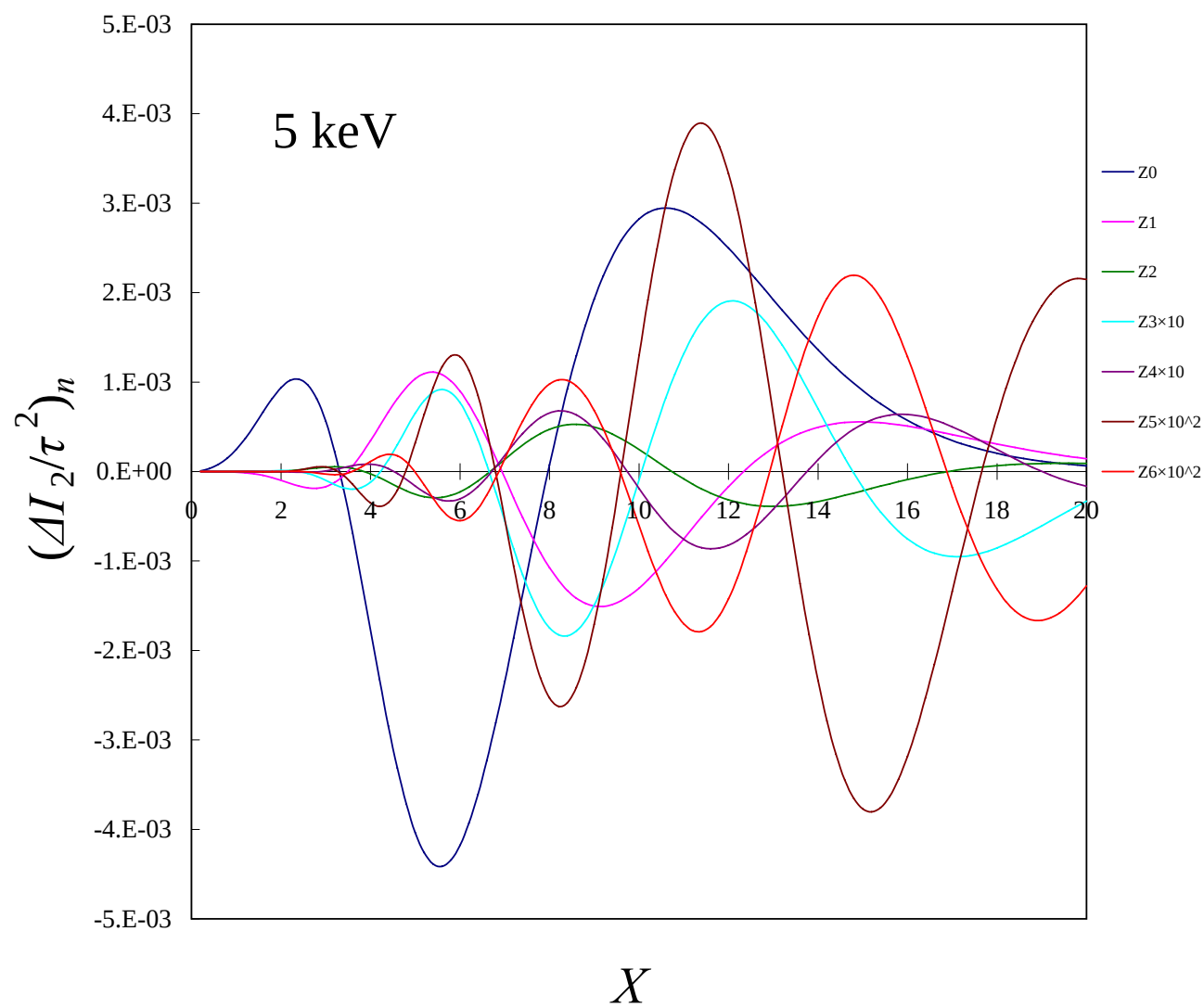


図 2.34: 電子温度 5 keV の熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果、2 回散乱における $Z_0 \sim Z_6$ の各々の項による強度変化。

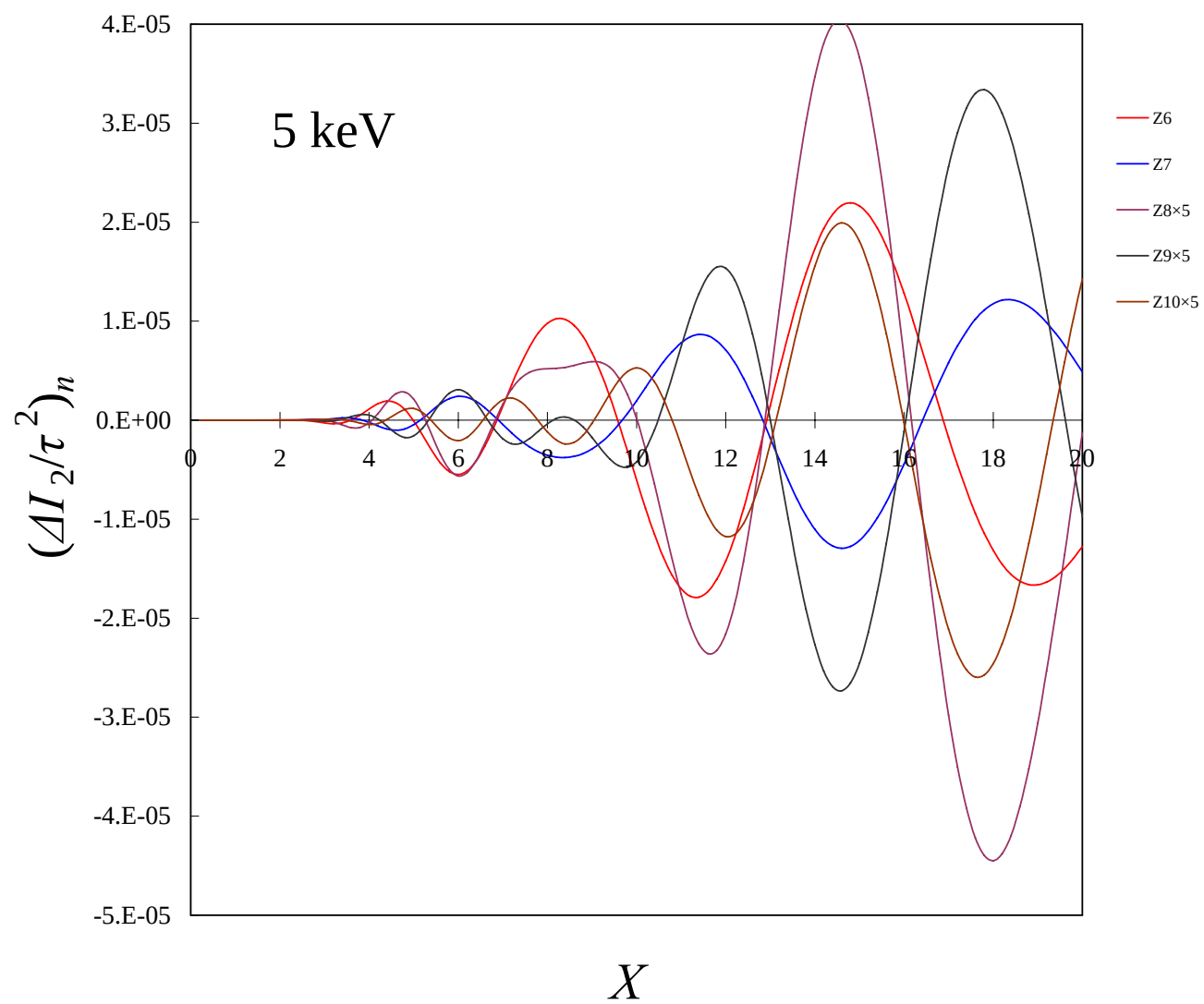


図 2.35: 図 2.34 と同じであるが、100 倍に拡大した。また、比較の対象を $Z_6 \sim Z_{10}$ とした。

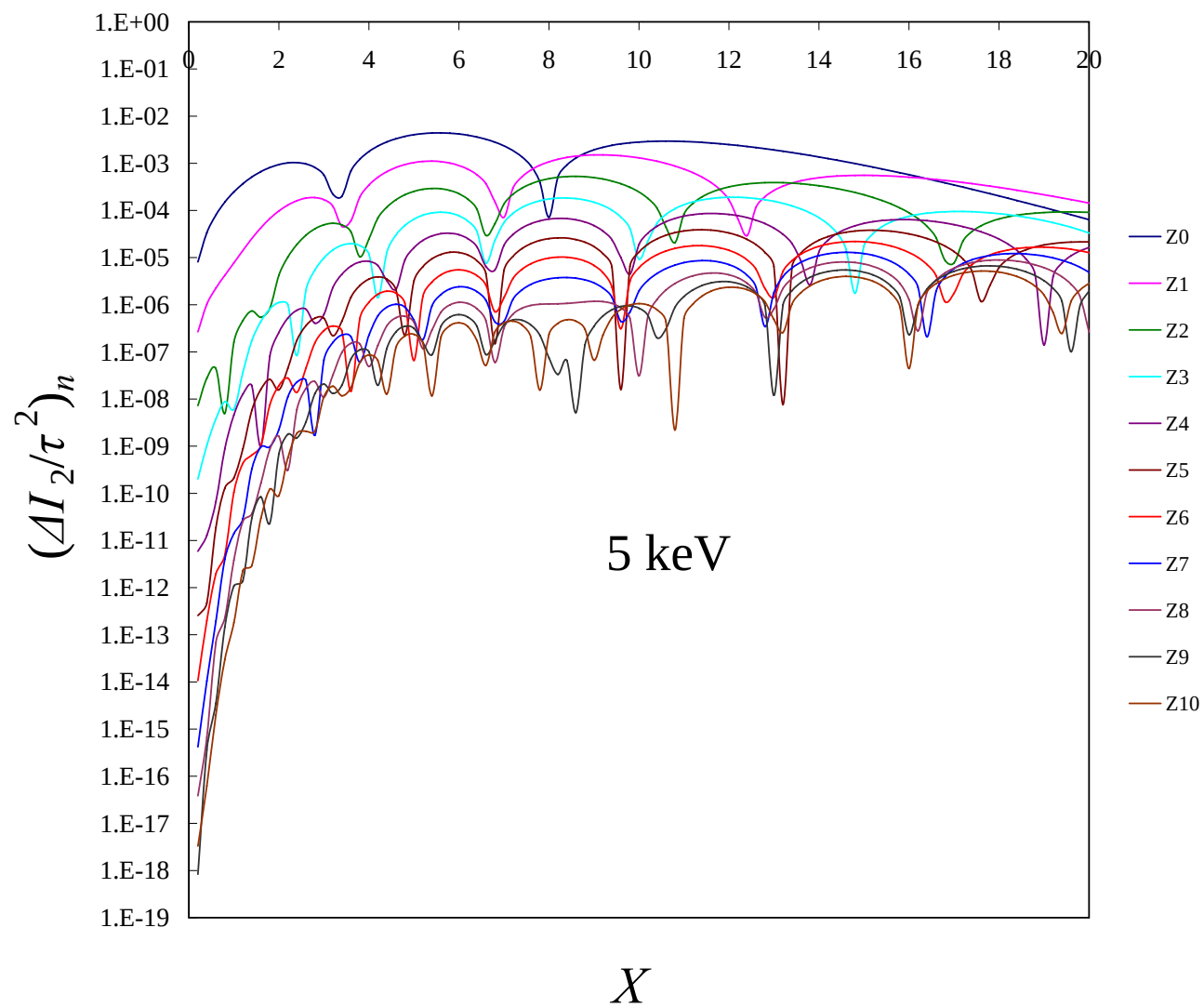


図 2.36: 電子温度 5 keV における $Z_0 \sim Z_{10}$ までの各項の強度変化への寄与。ただし、絶対値を取り、縦軸を対数とした。

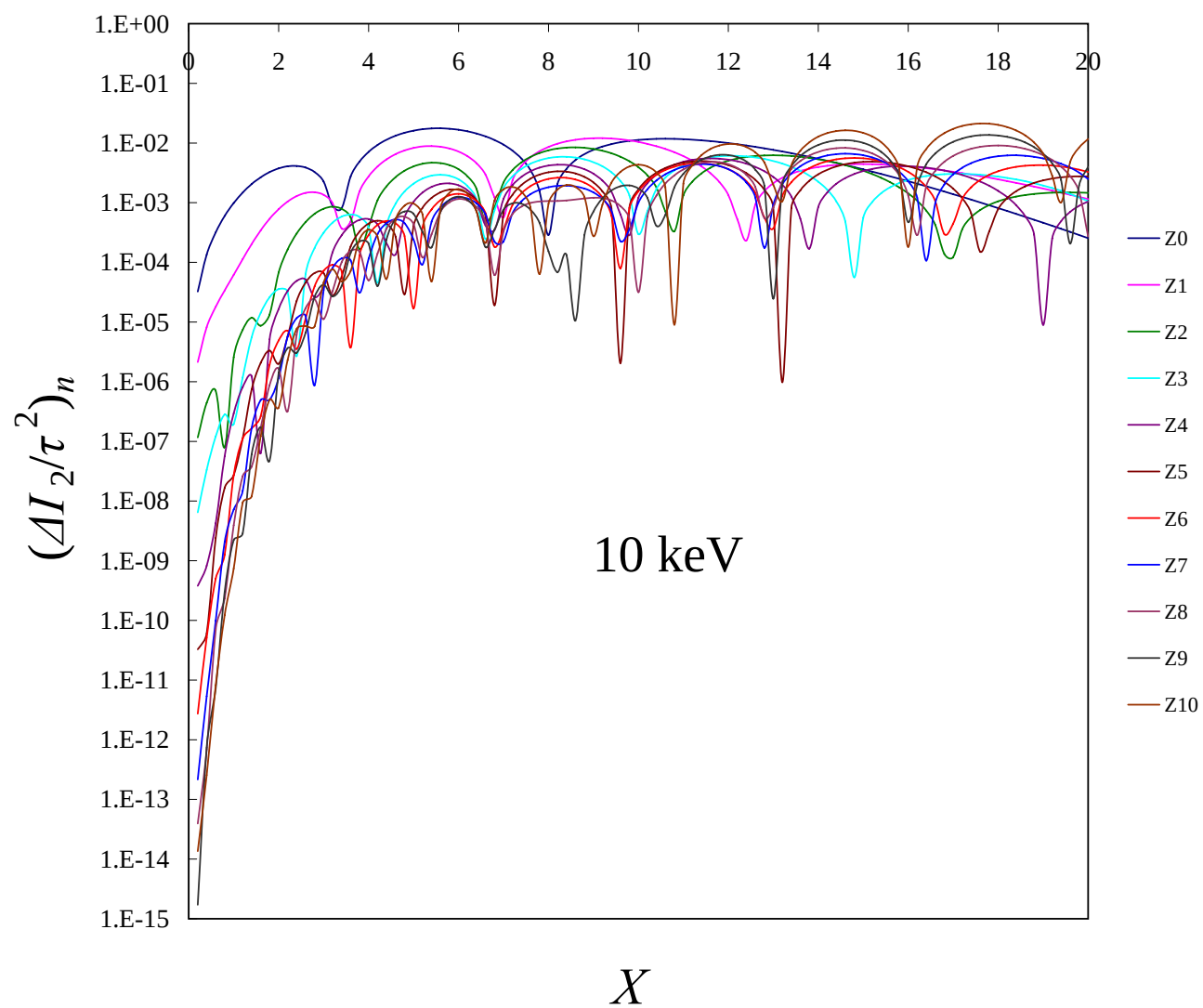


図 2.37: 図 2.36 と同じであるが、10 keV とした。

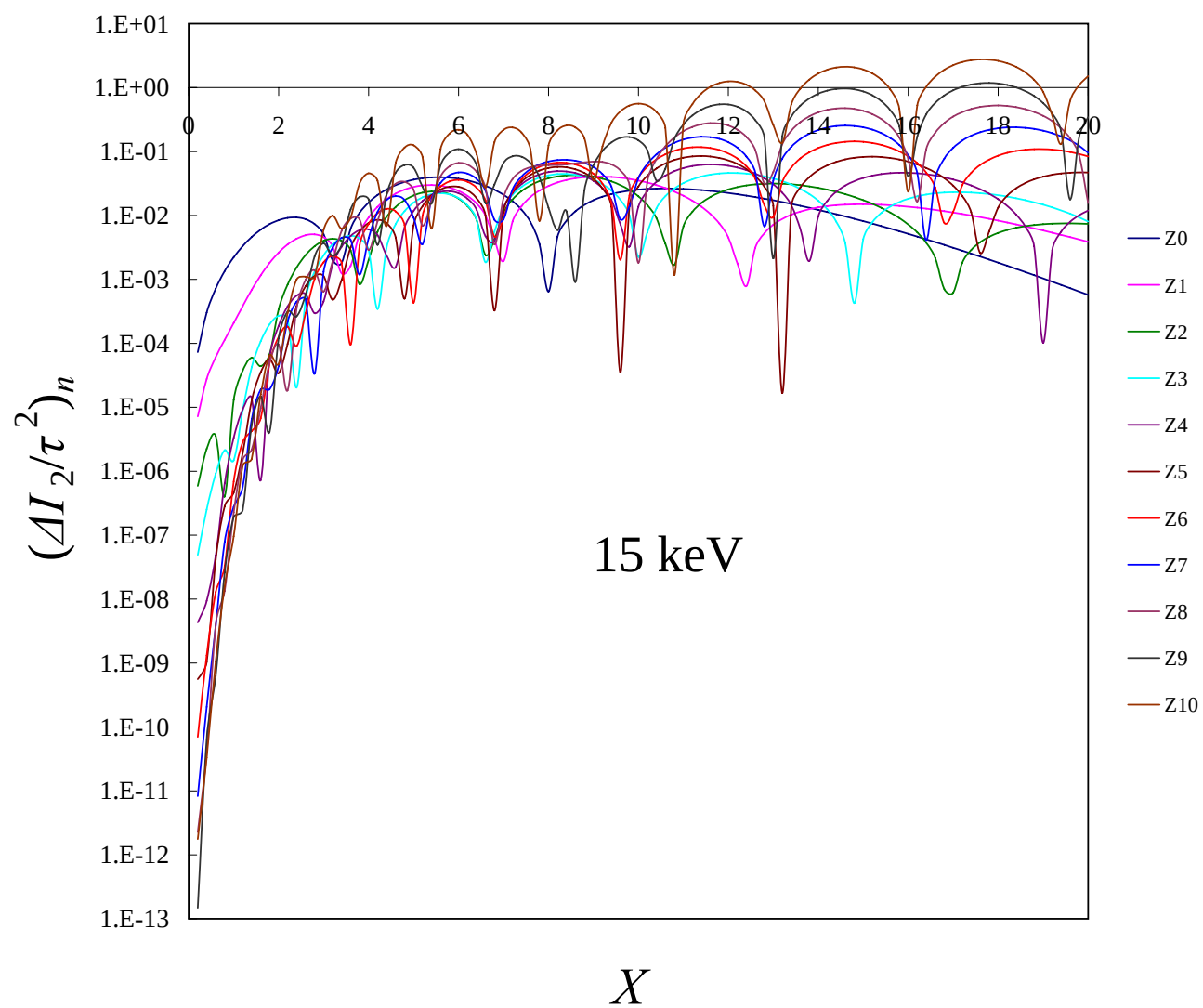


図 2.38: 図 2.36 と同じであるが、15 keV とした。

第3章 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

3.1 はじめに

この章では、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の解析について述べていく。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は宇宙背景放射に対する銀河団の固有運動によって生じる、光子分布の歪みである。元々、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、Sunyaev & Zeldovich [4] によって1980年に非相対論の極限で導き出された。90年代の後半に運動学的効果も熱的效果と同じ様に相対論的補正を取り入れられていった。その様な背景の中で、野澤、伊藤、神山 [39] は、いち早く熱的效果を応用し、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式を導出した。その後、いくつかの研究グループも計算 [40–42] を行った。しかし、3つの研究グループ [39–41] は一致したものの、1つの研究グループ [42] は異なる結果となった。ここでは、野澤らによって用いられた方法を用いて導出を行う。

観測の現状では、1章でも述べた様に、誤差が数百%もある状況であるが、新しい観測機の完成を目前にして、精度の向上に期待が高まるばかりである。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を観測するには、クロスオーバー周波数付近の観測が一番適している訳であるが、前の章で評価した熱的效果がどの程度、効いてくるのかも織り交ぜながら話を進めていく。

3.2 非相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

ここでは、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の非相対論の極限を考えていく。まず、銀河団がCMB系に対して固有速度 $\beta = v/c$ を持って運動していると考え、ここで、添え字 C を用いて銀河団系を表すとすると、

$$n(\omega) = n_C(\omega_C) \quad (3.1)$$

$$\omega_C = \gamma(\omega - \beta \cdot \mathbf{k}) \quad (3.2)$$

が成り立つ。ここで、 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ であり $\beta \ll 1$ を考慮すると

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} n_C(\omega_C) &= \frac{1}{e^{\hbar\omega_C/k_B T_0} - 1} \\ &= \frac{1}{e^{\hbar\gamma(\omega - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k})/k_B T_0} - 1} \\ &\approx \frac{1}{e^{\hbar\omega\left(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{\mathbf{k}}{\omega}\right)/k_B T_0} - 1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と変形される。ここでは自然単位系を考えているので、

$$\omega = kc = k \quad (3.5)$$

の関係を用いる。また、 $X = \hbar\omega/k_B T_0$ で置き換え、 $\beta \ll 1$ であると考え、(3.4) 式は、

$$n_C(\omega_C) \approx n(\omega) - \frac{Xe^X}{(e^X - 1)^2}(-\boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \quad (3.6)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ は光子の単位方向ベクトルを表す。ここから光子分布関数の変化分を求めると、

$$\begin{aligned} \Delta n(X) &= \frac{\tau Xe^X}{(e^X - 1)^2} \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ &= \frac{\tau Xe^X}{(e^X - 1)^2} \beta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.7)$$

と表す事が出来る。ここで、 θ_γ は、銀河団の運動と観測者のなす角を表す。熱的効果と同様に相対的な分布変化 $\Delta n/n_0$ に対して $X \rightarrow 0$ の極限をとる事で相対的な温度変化を得る事が出来る。運動学的効果は、銀河団が視線方向に近づいてくる場合、その速度を 1000 km s⁻¹ とし $\tau = 0.01$ を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{T_0} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{n_0} &\rightarrow \tau \beta \cos \theta_\gamma \\ &\approx O(10^{-4}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となり、熱的効果に比べて一桁程小さい歪みであることがわかる。ここで強度変化として、プランクの黒体放射より

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n}{n_0} \quad (3.9)$$

とする。このグラフは図 3.1 のようになる。

さて、実際に観測される量は、熱的效果と運動学的効果の重ね合わせである。グラフからもわかるように、運動学的効果による分布の歪みは小さいが、熱的效果が現れない、クロスオーバー周波数でピークを持つため、観測精度が上がれば、十分に観測できると考えられる。この効果の正確な観測により、銀河団の固有速度の視線方向成分を知る事ができる。

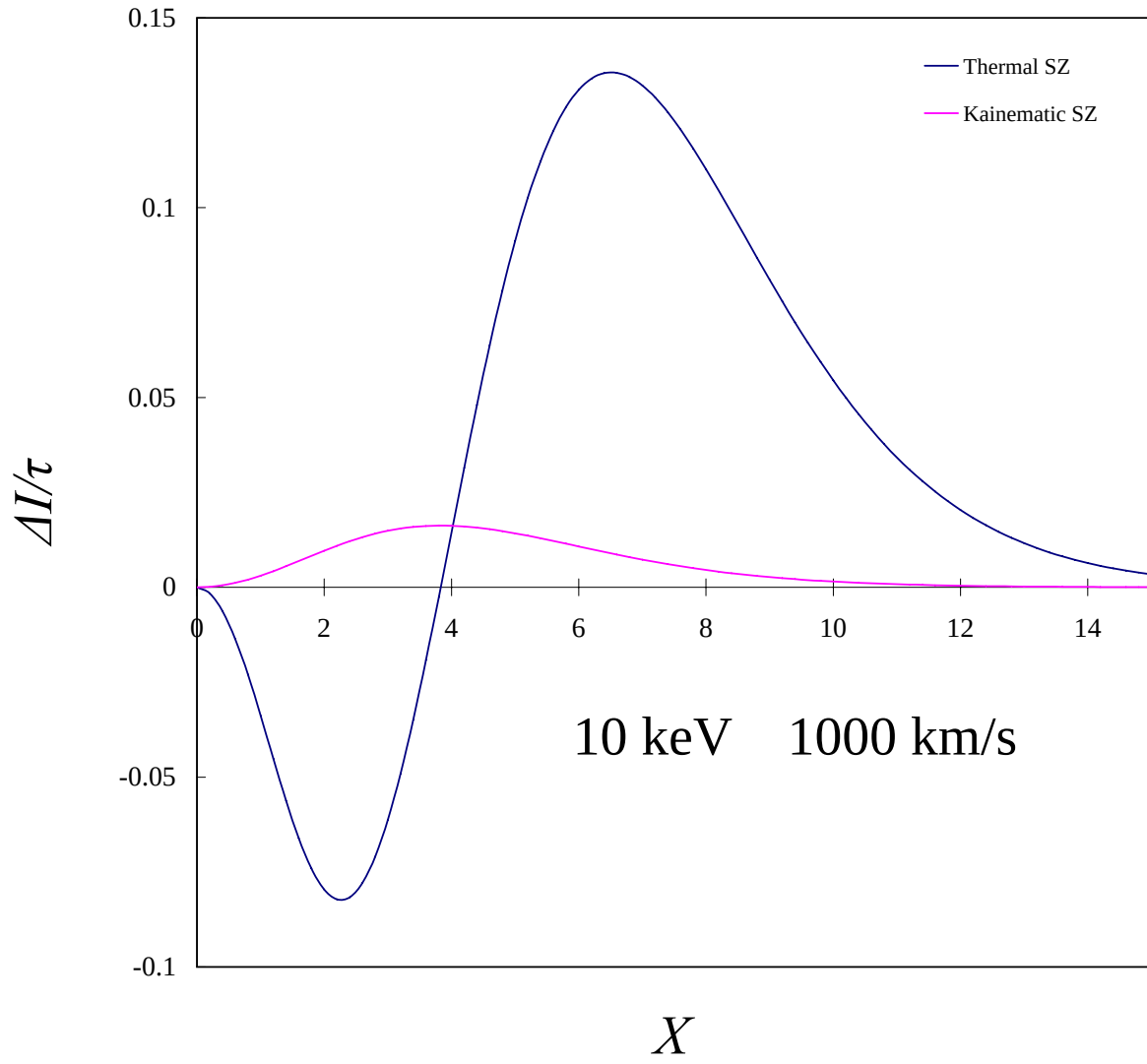


図 3.1: 電子温度 10 keV、銀河団が 1000 km/s で観測者に向かって動いている場合のグラフ。非相対論的な熱的スニャエフゼルドビッチ効果と運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の比較。

3.3 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

3.3.1 ボルツマン方程式

この節では、相対論的な運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果について考えていく。運動学的効果は、銀河団の固有速度 $\mathbf{v}$ によって生じる CMB の歪みである。運動学的効果に関しては、 $\beta\theta_e^2$ ($\beta = \mathbf{v}/c$) を含む項 [39] まで計算されている。近い将来、高い精度の観測が期待されているので、より精度の高い理論計算をする価値は十分にあるといえる。また、この節で扱う運動学的効果の計算に関しては、前章で行った熱的効果の計算をそのまま発展させた、野澤、伊藤、神山 [39] に従って計算を進める。

ここから、相対論的運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な計算を進めていく。まず CMB 系での光子の分布関数 $n(\omega)$ に対する時間発展の方程式は、前章で扱った (2.28) 式と同様である。ただし、簡単の為に、光子の始状態を z 軸に取り ($\mathbf{k} = (\omega, 0, 0, k)$)、銀河団の固有速度を x - z 平面 ($\beta = (\beta_x, 0, \beta_z)$) にとる。始状態と終状態の電子の分布関数は、銀河団の系においてフェルミ統計に従う。CMB の系では、以下の式に従って変換される。

$$f(E) = f_c(E_c) \quad (3.10)$$

$$f(E') = f_c(E'_c) \quad (3.11)$$

$$E_c = \gamma(E - \beta \cdot \mathbf{p}) \quad (3.12)$$

$$E'_c = \gamma(E - \beta \cdot \mathbf{p}') \quad (3.13)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.14)$$

ここで下付きの C は銀河団系を意味する。電子が温度 T_e を持つ時、フェルミ分布関数は、相対論的マクスウェル分布に近似する事ができ、

$$\begin{aligned} f_c(E_c) &= (e^{[(E_c - m) - (\mu_c - m)]/k_B T_e} + 1)^{-1} \\ &\approx e^{-[(E_c - m) - (\mu_c - m)]/k_B T_e} \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。これらの式を用いると、ボルツマン方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) \{ n(\omega)[1 + n(\omega')] \\ & - n(\omega')[1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')} e^{x \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ と $\hat{\mathbf{k}}'$ はそれぞれ、 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の方向における単位ベクトルである。(3.16) 式は、運動学的効果を考える上での基本の式となる。

次に熱的効果の場合と同様に $\Delta x \ll 1$ として指数関数を展開 (付録 C 参照) する。これをまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & 2 \left[\frac{\partial n}{\partial x} I_{1,0} + n(1 + n) I_{1,1} \right] \\ & + 2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{2,0} + 2(1 + n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{2,1} + n(1 + n) I_{2,2} \right] \\ & + 2 \left[\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} I_{3,0} + 3(1 + n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{3,1} + 3(1 + n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{3,2} + n(1 + n) I_{3,3} \right] \\ & + \dots \\ & + 2n \left[(1 + n) J_0 + \frac{\partial n}{\partial x} J_1 + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} J_2 + \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} J_3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ここで、

$$I_{k,l} \equiv \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) (\Delta x)^k e^{x \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \gamma^l (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^l \quad (3.18)$$

$$J_k \equiv -\frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) (\Delta x)^k (1 - e^{x \gamma \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')}) \quad (3.19)$$

となっている。一般に、 $I_{k,l}$, J_k について $\beta \theta_e^{n-1}$, $\beta^2 \theta_e^{n-2}$ を含む項まで正確に計算する為には、 $k = l = 2n$ まで計算する必要がある。今回の計算では、 $I_{10,10}, J_{10}$ まで必要となる。詳しい計算は、付録 B にて紹介する。また、ここでも CMB 光子の初期分布を温度 T_0 のプランク分布で近似した、

$$n_0(X) = \frac{1}{e^X - 1} \quad (3.20)$$

$$X \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T_0} \quad (3.21)$$

を (3.17) 式に代入し、 $T_0/T_e \rightarrow 0$ の極限をとると、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式として、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_0} &= \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \theta_e \left[Y_0 + \theta_e Y_1 + \theta_e^2 Y_2 + \theta_e^3 Y_3 + \theta_e^4 Y_4 \right] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 \left[B_0 + \theta_e B_1 + \theta_e^2 B_2 + \theta_e^3 B_3 \right] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta P_1(\cos \theta_\gamma) \left[C_0 + \theta_e C_1 + \theta_e^2 C_2 + \theta_e^3 C_3 + \theta_e^4 C_4 \right] \\ &+ \frac{\tau X e^X}{e^X - 1} \beta^2 P_2(\cos \theta_\gamma) \left[D_0 + \theta_e D_1 + \theta_e^2 D_2 + \theta_e^3 D_3 \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\tau \equiv \sigma_T \int dl N_e \quad (3.23)$$

$$\theta_e \equiv \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \quad (3.24)$$

$$\cos \theta_\gamma = \frac{\beta_z}{\beta} \quad (3.25)$$

$$P_1(\cos \theta_\gamma) = \cos \theta_\gamma \quad (3.26)$$

$$P_2(\cos \theta_\gamma) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_\gamma - 1) \quad (3.27)$$

を得る。ここで θ_γ は、銀河団の特異速度 $\beta = v/c$ と z 軸に取った光子の運動量 $\mathbf{k}$ との間のなす角を表し、また、

$$B_0 = \frac{1}{3} Y_0 \quad (3.28)$$

$$B_1 = \frac{5}{6} Y_0 + \frac{2}{3} Y_1 \quad (3.29)$$

$$B_2 = \frac{5}{8} Y_0 + \frac{3}{2} Y_1 + Y_2 \quad (3.30)$$

$$B_3 = -\frac{5}{8} Y_0 + \frac{5}{4} Y_1 + \frac{5}{2} Y_2 + \frac{4}{3} Y_3 \quad (3.31)$$

$$C_0 = 1 \quad (3.32)$$

$$C_1 = 10 - \frac{47}{5}\tilde{X} + \frac{7}{5}\tilde{X}^2 + \frac{7}{10}\tilde{S}^2 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= 25 - \frac{1117}{10}\tilde{X} + \frac{847}{10}\tilde{X}^2 - \frac{183}{10}\tilde{X}^3 + \frac{11}{10}\tilde{X}^4 \\ &+ \tilde{S}^2 \left(\frac{847}{20} - \frac{183}{5}\tilde{X} + \frac{121}{20}\tilde{X}^2 \right) + \frac{11}{10}\tilde{S}^4 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{75}{4} - \frac{21873}{40}\tilde{X} + \frac{49161}{40}\tilde{X}^2 - \frac{27519}{35}\tilde{X}^3 + \frac{6684}{35}\tilde{X}^4 \\ &- \frac{3917}{210}\tilde{X}^5 + \frac{64}{105}\tilde{X}^6 \\ &+ \tilde{S}^2 \left(\frac{49161}{80} - \frac{55038}{35}\tilde{X} + \frac{36762}{35}\tilde{X}^2 - \frac{50921}{210}\tilde{X}^3 + \frac{608}{35}\tilde{X}^4 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left(\frac{6684}{35} - \frac{66589}{420}\tilde{X} + \frac{192}{7}\tilde{X}^2 \right) \\ &+ \frac{272}{105}\tilde{S}^6 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{75}{4} - \frac{10443}{8}\tilde{X} + \frac{359079}{40}\tilde{X}^2 - \frac{938811}{70}\tilde{X}^3 + \frac{261714}{35}\tilde{X}^4 \\ &- \frac{263259}{140}\tilde{X}^5 + \frac{4772}{21}\tilde{X}^6 - \frac{1336}{105}\tilde{X}^7 + \frac{11}{42}\tilde{X}^8 \\ &+ \tilde{S}^2 \left(\frac{359079}{80} - \frac{938811}{35}\tilde{X} + \frac{1439427}{35}\tilde{X}^2 - \frac{3422367}{140}\tilde{X}^3 + \frac{45334}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{5344}{7}\tilde{X}^5 + \frac{2717}{84}\tilde{X}^6 \right) \\ &+ \tilde{S}^4 \left(\frac{261714}{35} - \frac{4475403}{280}\tilde{X} + \frac{71580}{7}\tilde{X}^2 - \frac{85504}{35}\tilde{X}^3 + \frac{1331}{7}\tilde{X}^4 \right) \\ &+ \tilde{S}^6 \left(\frac{20281}{21} - \frac{82832}{105}\tilde{X} + \frac{2948}{21}\tilde{X}^2 \right) \\ &+ \frac{341}{42}\tilde{S}^8 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$D_0 = -\frac{2}{3} + \frac{11}{30}\tilde{X} \quad (3.37)$$

$$D_1 = -4 + 12\tilde{X} - 6\tilde{X}^2 + \frac{19}{30}\tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left(-3 + \frac{19}{15}\tilde{X} \right) \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & -10 + \frac{542}{5}\tilde{X} - \frac{843}{5}\tilde{X}^2 + \frac{10603}{140}\tilde{X}^3 - \frac{409}{35}\tilde{X}^4 + \frac{23}{42}\tilde{X}^5 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{843}{10} + \frac{10603}{70}\tilde{X} - \frac{4499}{70}\tilde{X}^2 + \frac{299}{42}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{409}{35} + \frac{391}{84}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} D_3 = & -\frac{15}{2} + \frac{4929}{10}\tilde{X} - \frac{39777}{20}\tilde{X}^2 + \frac{1199897}{560}\tilde{X}^3 - \frac{4392}{5}\tilde{X}^4 \\ & + \frac{16364}{105}\tilde{X}^5 - \frac{3764}{315}\tilde{X}^6 + \frac{101}{315}\tilde{X}^7 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{39777}{40} + \frac{1199897}{280}\tilde{X} - \frac{24156}{5}\tilde{X}^2 + \frac{212732}{105}\tilde{X}^3 - \frac{35758}{105}\tilde{X}^4 \right. \\ & \left. + \frac{404}{21}\tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{4392}{5} + \frac{139094}{105}\tilde{X} - \frac{3764}{7}\tilde{X}^2 + \frac{6464}{105}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left(-\frac{15997}{315} + \frac{6262}{315}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

である。ここで、

$$\tilde{X} \equiv X \coth \left(\frac{X}{2} \right) \quad (3.41)$$

$$\tilde{S} \equiv \frac{X}{\sinh(X/2)} \quad (3.42)$$

となっている。さて、ここで、散乱前後の光子の数が増えない事が重要であるが、 Y_0 から Y_4 まで全てで光子数の変化

$$\int dX X^2 \Delta n(X) \quad (3.43)$$

を求めると、この積分値が解析的に全て 0 になり、光子数が保存する。この事は前章でも述べたが、この積分で、(3.22) 式の一行目と二行目が、消える事が分かる。一方で、三行目と四行目は、 $P_1(\cos \theta_\gamma)$ または、 $P_2(\cos \theta_\gamma)$ に比例している。つまり、これらの項は、立体角積分、 $\int d\Omega_\gamma$ によって消える事がわかる。

最後に実際に観測されるスペクトルの強度変化として、

$$\Delta I = \frac{X^3}{e^X - 1} \frac{\Delta n(X)}{n_0(X)} \quad (3.44)$$

と定義しておく。それぞれの展開次数でどのように変化していくかを図 3.2, 3.3 に表した。これをみると運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、収束が良い関数である事がわかる。数値積分による厳密解と比較するとよく一致している。非相対論の結果 (C_0 の項) と比べるとクロスオーバー周波数付近で 10% 程の違いが現れている。また、 β^2 の項は、かなり小さいので 10 倍したものと比較した。 β の項と比べると、二桁程小さい寄与である。図は、銀河団が観測者に向かい近づいてくる場合であるが、近づいてくる場合には、 $\Delta I > 0$ となり、遠ざかる場合には、 $\Delta I < 0$ となる。

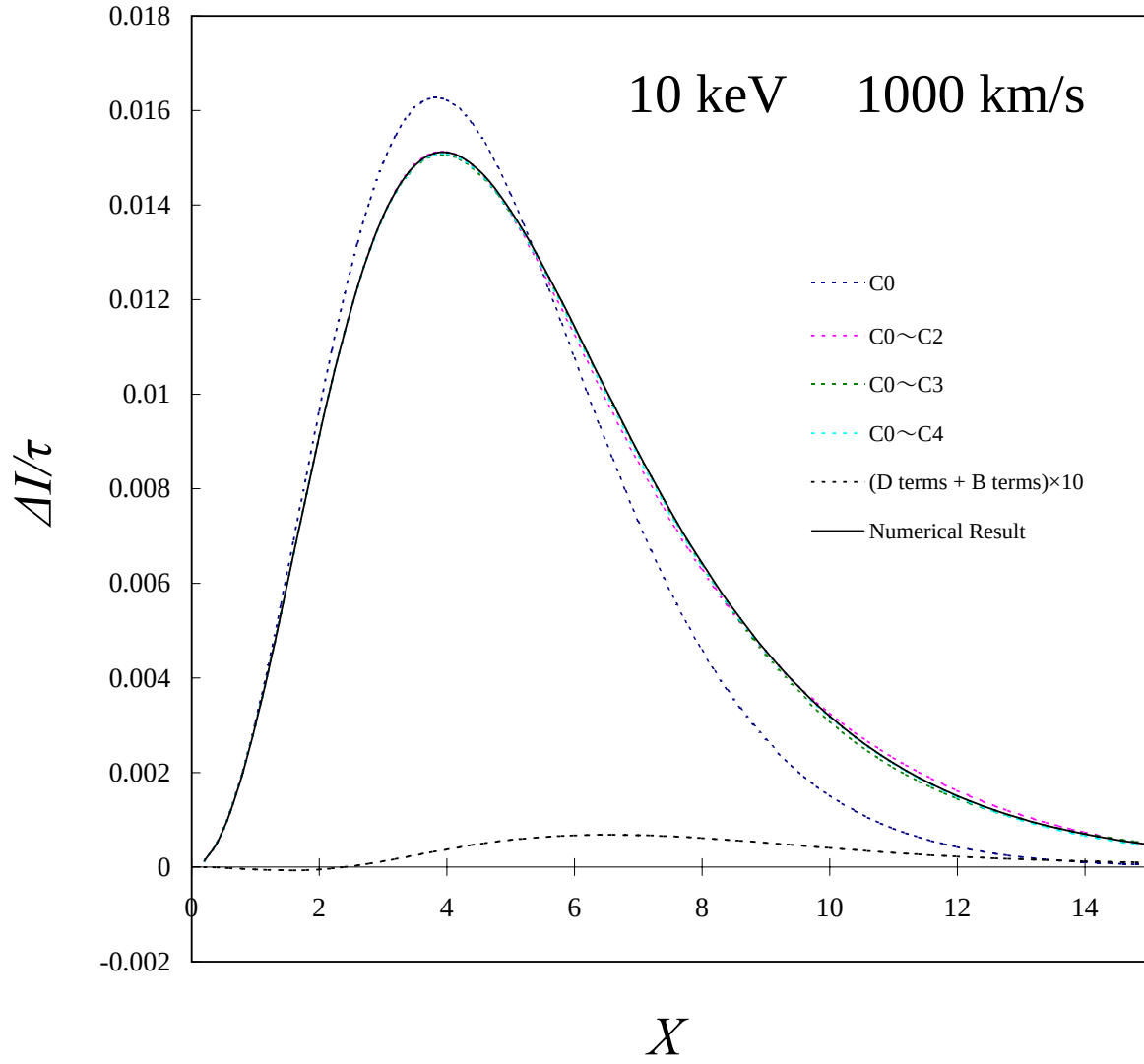


図 3.2: 電子温度 10 keV、また、銀河団速度を観測者に向かって 1000 km/s の場合のグラフ。相対論を考慮した運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のグラフを数値計算結果と展開式で比較した。

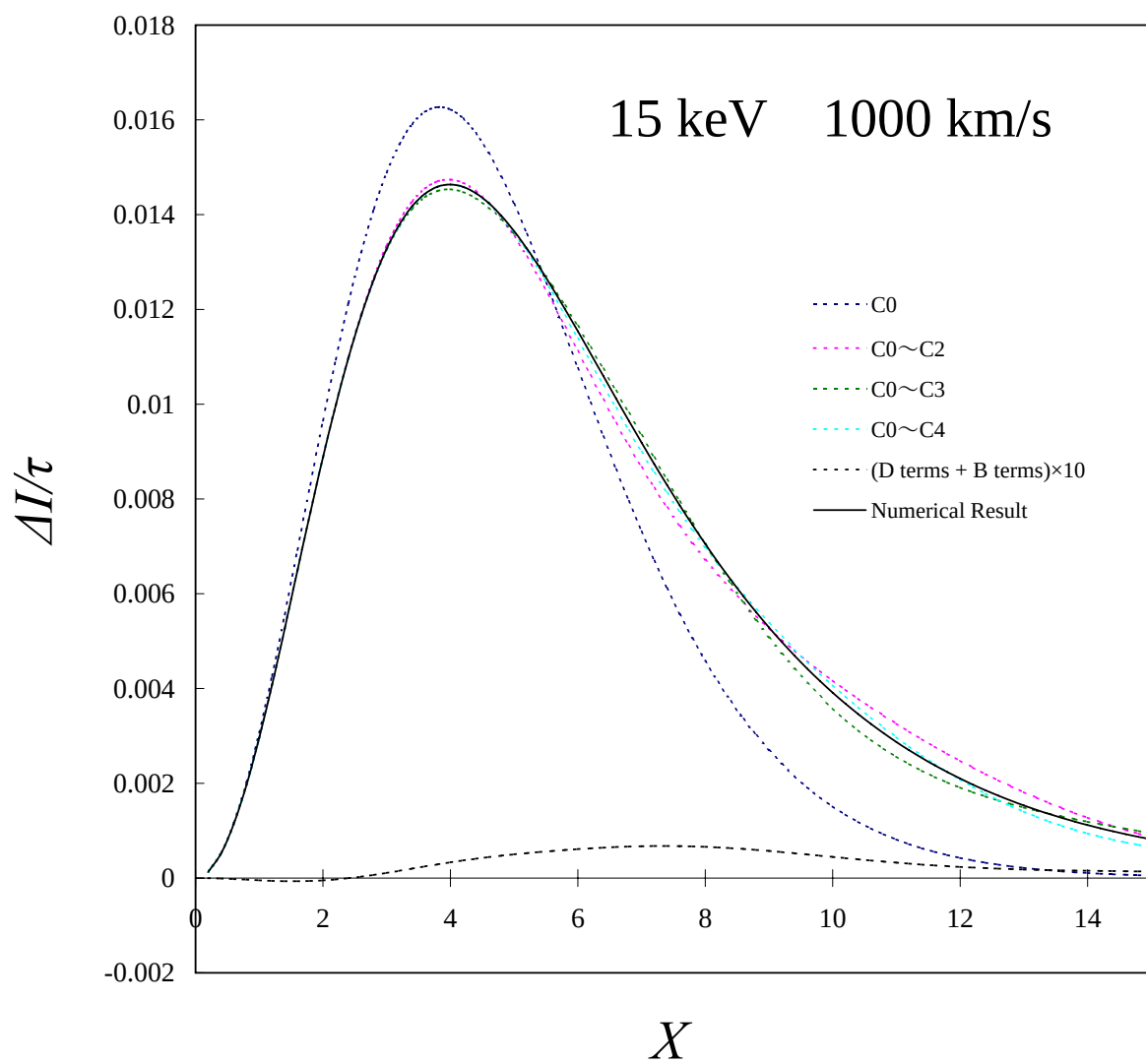


図 3.3: 図 3.2 と同じであるが、15 keV とした。

3.3.2 数値計算との比較

これまでも、運動学的スニャエフゼルドビッチ効果を観測するにあたって、熱的效果がなくなるクロスオーバー周波数での観測が特に重要である事は、述べてきた。相対論を考慮する事で、クロスオーバー周波数に温度依存性が出てきてしまうので、正確な周波数 X_0 を決定する事が重要である。伊藤、神山、野澤 [32] は、 X_0 に関するフィッティング式として、

$$X_0 = 3.830(1 + 1.167\theta_e - 0.8533\theta_e^2) \quad (3.45)$$

を求めた。この式の精度は高く $0 \leq k_B T_e \leq 50$ keV の領域で誤差 10^{-3} 以下である。(3.45)式を用いて X_0 を決定し、この周波数において、縦軸を ΔI 、横軸を電子温度としてプロットしたのが図 3.4, 3.5 である。ここで図 3.4 は、 β^2 の項を入れずにプロットした。 β^2 の項を入れた図 3.5 と比べるとわずかに、数値積分とずれが生じているのがわかる。実際、クロスオーバー周波数付近において β^2 の項は、0.3%程度の影響を与える事がわかった。また、 $k_B T_e \leq 20$ keV では、求めた展開式はとても良い近似になっていると言える。

次に、ボルツマン方程式を直接的に数値積分したものとの相対誤差を取ったものが図 3.6, 3.7 となる。 $X \rightarrow 0$ で 10^{-5} 以下に収束している事がわかる。これは、展開計算の正しさを示すものである。逆にこの領域では、数値積分の精度を表している、と考えた方が妥当であろう。実際に数値積分の分割数を変えることで、積分精度の収束の仕方を比較すると、今回用いた数値積分の精度は $10^{-5} \sim 10^{-6}$ である事が分かっている。高周波数側では、やや精度が落ちているが、この領域では運動学的効果は、熱的效果と比べるとほとんど値を持たない。つまり、高周波数側で精度が落ちている事は、実際の観測からの解析の際、ほぼ影響がないと考えても良いだろう。

最後に本研究で求めた、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のフィッティング式、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の C_3, C_4 の項、 β^2 の項が銀河団の固有速度を評価する際にどのような違いになって現れるか、確かめてみる事にする。

ここでは、SPT の観測周波数の一つである 220 GHz を想定する。また、簡単の為に銀河団は、観測者に向かって運動していると考ええる。実際の評価方法は次のステップに従う。

1. 銀河団の温度と固有速度を仮定する。
2. 仮定した条件の下で、全 SZ 効果による強度変化の歪みを数値計算により求める。
3. 熱的效果のモデルより、220 GHz での熱的效果の成分を計算する。
4. 全 SZ 効果から、モデルより計算した熱的效果の成分を差し引く事によって運動学的

成分を求める。

5. 運動学的効果のモデルより、 β の値を変化させる事で、4. での結果と一致させる。

最後に得られた β より、銀河団の固有速度は、光速を乗ずる事で直ちに求める事ができる。この結果は、章末にて表として紹介してある。仮定した条件は、銀河団温度 10, 15 keV、固有速度 500, 1000 km/s である。結果としては、15 keV の超高温の銀河団の評価の際には、フィッティング式を用いる事で、 Y_4 までの展開式と比べると 20 km/s 近く、2002 年のフィッティング式と比べると 5 km/s 程正確に評価できる事が分かった。またこの値は固有速度の大きさにほぼ依存しない、絶対的な値であり、固有速度の小さい銀河団であっても同じ様な違い (むしろ、僅かに大きくなる) が現れる。

次に C_3, C_4 の項の影響を見てみると、これらの項の影響は、銀河団の固有速度に依存する。今回の仮定した条件の結果では、固有速度の評価に 1% ほどの影響を与える事が分かった。また、15 keV の場合、 β^2 の項を抜いた方が精度がよく 0.01% 程度の誤差に収まっている。これは、図 3.5 を見れば理解できる。 β^2 の項を抜く事での誤差と、 $C_0 \sim C_4$ の展開式の誤差が 15 keV 付近でちょうど打ち消し合っている様になっている為である。

10 keV と温度が下がると、どのモデルもあまり差がなくなっている事がわかる。値を見ると、熱的效果のモデルで $Y_0 \sim Y_4$ を使う場合が固有速度によらず 2 km/s 弱、固有速度が大きい場合 β^2 を抜く影響が最も大きく、固有速度が小さい場合、 C_3, C_4 の考慮しない場合が大きくなっているが、共に 0.5% 以内の誤差である。

また、最後に非相対論のみで評価した場合を見てみる事にする。この場合は、どの温度、固有速度を取っても正確に評価できているとは言える事ができない結果となった。特に 15 keV, 500 km/s の条件では、近づいているどころか遠ざかっているという評価になってしまう。今回の結果から、より相対論補正の重要性が明らかになったであろう。

3.4 まとめ

運動学的効果による CMB の強度変化は、熱的效果に比べ桁程小さい。また、実際の観測量は運動学的効果と熱的效果の足し合わせであるので、運動学的効果を観測するためには、熱的效果の影響が少ない周波数で観測する必要がある。この為、クロスオーバー周波数における観測が運動学的効果の検出に期待されている。

この章では、まず、相対論的な運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開式を導出した。その結果、クロスオーバー周波数付近で非相対論的な場合と比べ 10% 程の無視でき

ない差が生じる事が判明した。また、厳密数値計算との比較により、15 keV と高温の場合においても重要なクロスオーバー周波数付近で 1% 以内という展開式の精度を確認する事が出来た。

また、この章の最後に、まもなく完成する SPT での観測周波数を用いて、シュミレーションを行った。その結果、この論文で求めたフィッティング式、運動学的効果の高次までの項を使って、解析すると 15 keV 以上の超高温の銀河団においては、評価に数%の差が現れる事が分かった。特に固有速度の視線方向成分が小さい銀河団では、相対的にはさらに差が現れる事になる。また、 C_3, C_4 の項を用いる事で 1% の精度の向上に役立つ事が分かった。

現在の観測精度は、本論文において向上した理論精度には遠く及ばないのが現状である。本論文における理論精度まで観測精度が向上する事に期待しつつ、この章を閉じる事にする。

15 keV, 1000 km/s

Model	Total SZ (=A)	Thermal SZ (=B)	Kainematic SZ (=A-B)	v (km/s)
$T_1 + K_3$	0.005762	-0.009133	0.014894	1017.0
$T_2 + K_3$	0.005762	-0.008782	0.014544	993.1
$T_3 + K_3$	0.005762	-0.008854	0.014616	998.0
$T_3 + K_1$	0.005762	-0.008854	0.014616	990.3
$T_3 + K_2$	0.005762	-0.008854	0.014616	1000.1
NR	0.005762	0.005491	0.000271	185.3

15 keV, 500 km/s

Model	Total SZ (=A)	Thermal SZ (=B)	Kainematic SZ (=A-B)	v (km/s)
$T_1 + K_3$	-0.001554	-0.009133	0.007578	518.0
$T_2 + K_3$	-0.001554	-0.008782	0.072276	494.0
$T_3 + K_3$	-0.001554	-0.008854	0.007299	498.9
$T_3 + K_1$	-0.001554	-0.008854	0.007299	496.1
$T_3 + K_2$	-0.001554	-0.008854	0.007299	500.5
NR	-0.001554	0.005491	-0.007046	-482.6

T_1 : $Y_0 \sim Y_4$ による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果 [32]

T_2 : 2002 年のフィッティング式による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果 [37]

T_3 : 前章で示したフィッティング式

K_1 : $C_0 \sim C_2$, $B_0 \sim B_3$, $D_0 \sim D_3$ による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

K_2 : $C_0 \sim C_4$ による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

K_3 : $C_0 \sim C_4$, $B_0 \sim B_3$, $D_0 \sim D_3$ による運動学的スニャエフゼルドビッチ効果

NR: 熱的・運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果共に非相対論 (Y_0, C_0)

10 keV, 1000 km/s

Model	Total SZ (=A)	Thermal SZ (=B)	Kainematic SZ (=A-B)	v (km/s)
$T_1 + K_3$	0.011915	-0.003227	0.015142	1001.6
$T_2 + K_3$	0.011915	-0.003191	0.015106	999.3
$T_3 + K_3$	0.011915	-0.003198	0.015114	999.8
$T_3 + K_1$	0.011915	-0.003198	0.015114	999.2
$T_3 + K_2$	0.011915	-0.003198	0.015114	1002.1
NR	0.011915	0.003661	0.008255	546.6

10 keV, 500 km/s

Model	Total SZ (=A)	Thermal SZ (=B)	Kainematic SZ (=A-B)	v (km/s)
$T_1 + K_3$	0.004350	-0.003227	0.007577	501.8
$T_2 + K_3$	0.004350	-0.003191	0.007541	499.4
$T_3 + K_3$	0.004350	-0.003198	0.007548	499.9
$T_3 + K_1$	0.004350	-0.003198	0.007548	498.5
$T_3 + K_2$	0.004350	-0.003198	0.007548	500.46
NR	0.004350	0.003661	0.000689	45.7

T_1 : $Y_0 \sim Y_4$ による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果 [32]

T_2 : 2002 年のフィッティング式による熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果 [37]

T_3 : 前章で示したフィッティング式

K_1 : $C_0 \sim C_2$, $B_0 \sim B_3$, $D_0 \sim D_3$ による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

K_2 : $C_0 \sim C_4$ による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

K_3 : $C_0 \sim C_4$, $B_0 \sim B_3$, $D_0 \sim D_3$ による運動学的スニャエフゼルドビッチ効果

NR: 熱的・運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果共に非相対論 (Y_0, C_0)

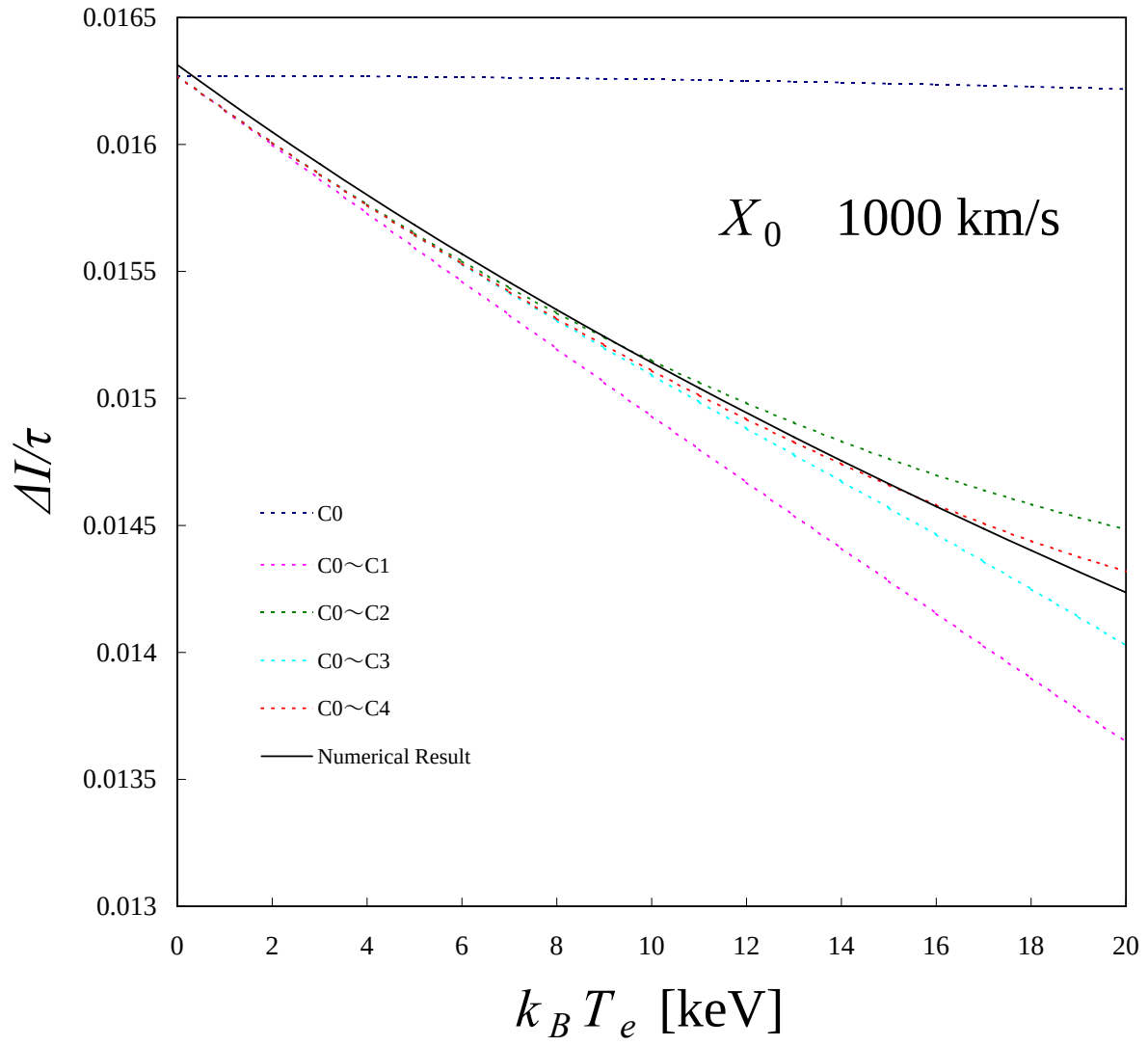


図 3.4: 周波数をクロスオーバー周波数に固定し、温度による強度変化を各展開次数で比較した。

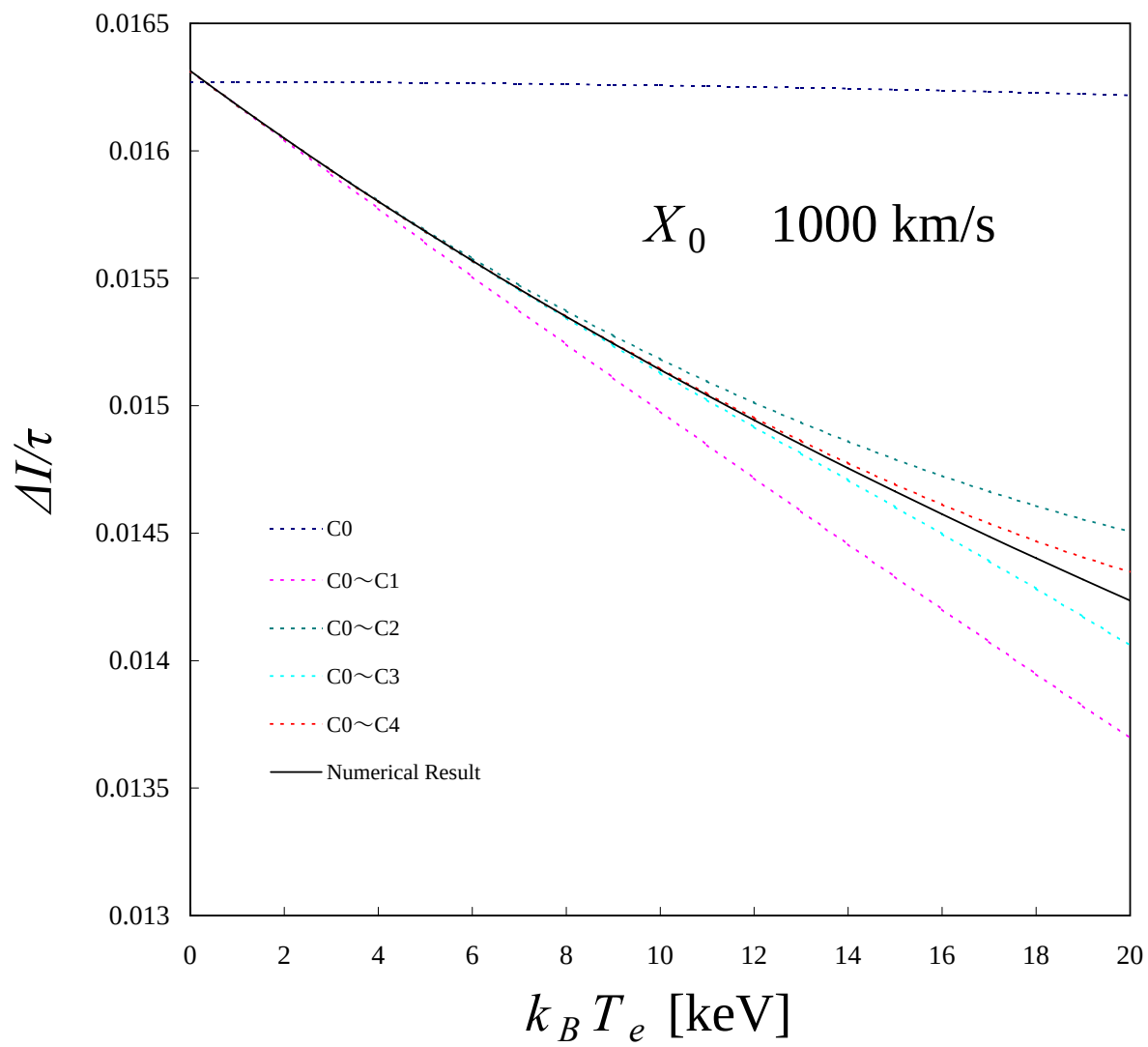


図 3.5: 図 3.4 と同じであるが、 β^2 の項を含めた。

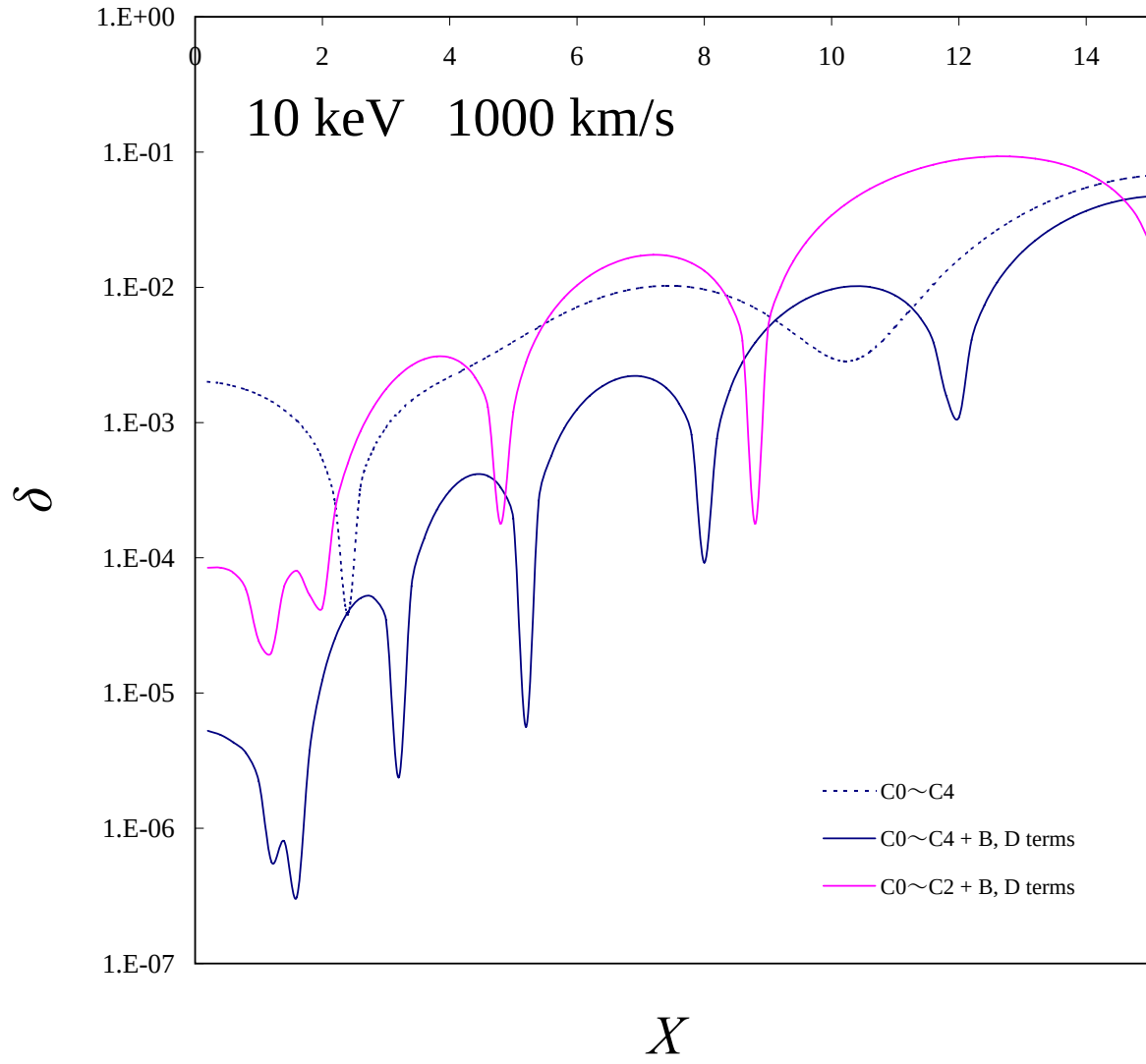


図 3.6: 電子温度 10 keV, 固有速度 1000 km/s における運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の展開計算と厳密数値積分の相対誤差。

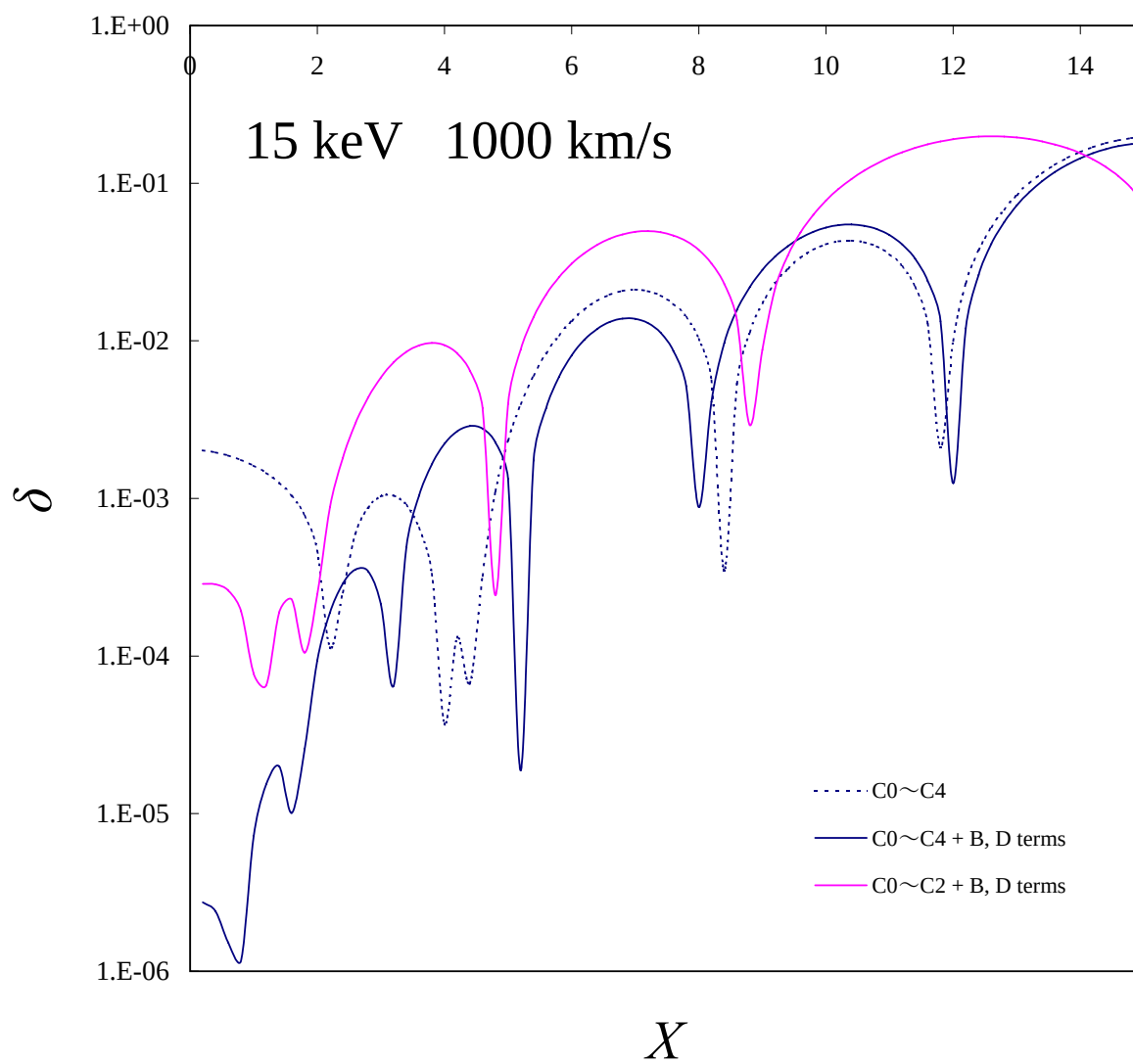


図 3.7: 図 3.6 と同じであるが、15 keV とした。

第4章 まとめ

スニャエフ・ゼルドビッチ効果は、大きく分けて、熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果と運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果に分けられる。熱的效果は、銀河団中の高温プラズマとのコンプトン散乱によって生じる宇宙背景放射の歪みであり、運動学的効果は、CMBに対する相対的な固有速度によって生じる歪みである。ここで運動学的効果は、熱的效果と比べると、一桁程小さい歪みである。どちらの効果も90年代以降、高温の銀河団が次々と発見された事により、相対論的補正の重要性が認識され、研究が進められた。また、90年代は、スニャエフ・ゼルドビッチ効果の観測において、目覚しい進歩を遂げた時期である。この時期以降、SZ効果の観測が活発に行われている。特に近い将来、高精度の観測機が完成する事もあり、より高い精度でスニャエフ・ゼルドビッチ効果を評価する事を目的とした。

熱的效果に関しては、伊藤、神山、野澤 [32] の方法を用いて、まず θ_e^5 を含む項まで計算を行った。この結果、非相対論の場合と比べると強度変化のピークとなる周波数で10%以上の違いが生じた。その他にも、クロスオーバー周波数に温度による依存性が生まれる等、相対論が無視できない影響を与える事が確認された。また、完成間近であるSPTの観測周波数に注目してより詳細に相対論の影響の確認を行った。その結果、ゆがみのピークに近い270 GHzにおいては、高温 ($T_e = 15$ keV) の場合、実に50%近い補正にもなり、その重要性が明らかであった。温度が低い ($T_e = 5$ keV) 場合においても、少なくとも3%以上の補正があり、これは無視できない影響であると言える。また、厳密数値積分との比較を行い、展開式の精度を調べた。この結果、電子温度が15 keV以下の場合では、一部の領域(クロスオーバー周波数、高周波数側)を除いて1%以下の精度とかなり良い近似である事が確認された。

次にさらに高次の項である、 θ_e^{11} を含む項まで計算し、展開式の振る舞いを確認した。この結果、クロスオーバー周波数以下の低周波数側では、高次まで取った方が近似は良くなる事が確認された。しかし、高周波数側である程、厳密解を中心に振動が激しくなり、高次まで考慮した方が精度が落ちてしまう結果となった。また、電子温度が高い場合である

程、低い周波数から振動が起こり始める事が分かった。電子温度の違いで見ると、15 keV より低い温度では、高次の項を考慮するほど全体的に収束している。15 keV の場合では、ほとんどの領域でわずかではあるが、収束している事が確認された。ただ、高周波数側では、高次まで考慮した方が精度が悪くなる逆転が起り始めている事から、15 keV がこの展開計算の限界であると結論付けられる。

次に展開式が厳密解を中心に振動している事に注目し、振動から厳密解 (振動の中心) を求める事を試みた。これは、展開次数が一つ異なると、その振動が厳密解を中心にほぼ逆になる事を利用し、平均を繰り返す事でその振動を抑えるという方法である。その結果、広い周波数、温度で非常に精度の良いフィッティング式を導出する事に成功した。これは、以前求められた、フィッティング式 [36,37] よりも全体的に高精度であり、特にクロスオーバー周波数での改善が一桁以上見られた。さらに 20 keV と超高温の場合においても、数値計算との誤差は 0.1% 以下と非常に良く一致している。これに伴い、存在する高温の銀河団 (現在見つかった最も高温な銀河団は、約 17.4 keV)、観測が行われる周波数 (CMB の観測では、Planck の 850 GHz 等) の全ての領域において高い信頼度を誇るフィッティング式が導けた事になる。よって、熱的效果をより高い精度で評価をする事に成功したと言える。

熱的效果の最後に、銀河団中の電子は非常に希薄 ($\sim 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) である為、散乱は 1 回のみとした仮定がどれほど正しいのかを検証した。方法としては、1 回散乱による分布の変化を摂動的に加える事で 2 回散乱による影響を調べた。その結果、高温 ($T_e = 15 \text{ keV}$) かつ 2 回散乱による強度変化が最も大きい周波数である $X = 5$ 付近であっても、1 回散乱の歪みと比べると 0.2% 程の影響しか与えない事が確認された。これは、現実的な観測精度を考えると、無視しても影響がないと考えられる。よって、電子による散乱が 1 回のみという仮定は、十分正しいと言える。ここで、一言付け加えておくと、実は、先ほど述べた、フィッティング式の精度よりは、2 回散乱による影響のほうが大きい。つまり、フィッティング式の精度をさらに向上させる事は、2 回散乱の項を加えなければ意味がないと言う事である。

運動学的効果に関しても、野澤、伊藤、神山 [39] の方法を用いて、 $\beta\theta_e^4$ 及び $\beta^2\theta_e^3$ を含む項まで導出した。運動学的効果もクロスオーバー周波数において、10% 程の相対論の影響がある事を確認した。これは、無視する事は出来ない影響である。また、厳密数値積分との比較する事により展開計算の有効性を調べた。その結果、運動学的効果がピークを持つクロスオーバー周波数付近で 1% 程度の誤差に収まる事を確認した。また、 $X \rightarrow 0$ の極限で数値計算との相対誤差が 10^{-6} まで収束している事から、この展開計算が正しかったと言

える。

最後に、銀河団の温度と固有速度を仮定し、熱的效果と運動学的効果の理論式を組み合わせる事で、仮定した固有速度に対してどれほどの精度で再現できるかのシュミレーションを実行した。これは、本研究で求めたフィッティング式、運動学的効果の高次の項が固有速度の評価に対してどれ程の精度が向上したのかを調べる為である。熱的效果、運動学的効果共に非相対論を用いて評価した場合、近づいているという仮定に対し、遠ざかっているという評価になる場合もあった。このシュミレーションの結果、高温かつ視線方向速度成分の低い銀河団に関しては、数%(固有速度が 1000 km/s の場合 2%程度)の精度向上が見られる。これは、現実的な範囲で観測精度の向上 (10 km/s のオーダーで固有速度を決定できるレベル) を考えれば、この補正が必要となる可能性は十分にあると言える。

本研究では、運動学的効果を観測する為に主にクロスオーバー周波数に着目し、その評価する精度を高めた。本研究が、将来、宇宙の謎を解く為の手助けとなれば幸いである。今後の宇宙論の発展を期待しつつ本論文の幕を閉じる。

研究業績

発表論文

1. “ An Improved Formula for the Relativistic Corrections to the Kinematical Sunyaev-Zeldovich Effect for Clusters of Galaxies ”
S. Nozawa, N. Itoh, Y. Suda and Y. Ohhata:
Nuovo Cimento **121 B**, 487-500 (2006)

口頭発表

1. 2006 年 日本天文学会「2006 年春季年会」(和歌山大学) 2006 年 3 月 27 日
「展開計算による運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の解析式の導出」
須田 康彦、大畑洋一、伊藤 直紀、野澤 智

謝辞

最後にこの研究を進めるにあたり、多くの方々にご指導いただきました事を心から感謝し、この場をお借りして厚く御礼申し上げます。

指導教官である伊藤直紀教授には、研究に対する姿勢から常日頃からの心構えまで多くの事を教えていただきました。また、野澤智教授には、お忙しい中、物理の内容やコンピュータに関する事まで丁寧に教えていただきました。大変感謝しています。和南城伸也助手には、私が伊藤研究室に配属が決まったばかりの学部生の頃に、プログラムについての助言を頂きました。庄司義治さんには、様々な面で支えていただき、研究する環境を整えていただきました。大学に入学した当初よりお世話になった物理学科の先生方にもこの場をお借りして御礼申し上げます。

すでに卒業された、先輩の浅原亮平さん、富沢奈美さん、渡邊勇亮さんには、研究生生活を始める上で多くの事を教えていただきました。共に伊藤研究室に配属が決まり、今日まで共に学んで来た大畑洋一君とは、多くの議論をし大変有意義な時間を過ごせたと思います。また、1年という短い期間でしたが、伊藤研究室で共に学んだ同輩の東悟史君、古川智久君、飯田崇史君、柴田大輔君、島尻芳人君には研究・生活面でお世話になりました。同様に短い期間でしたが後輩の野田卓臣君、山本拓君、加藤鉄平君、小川将吾君、高橋啓吾君、内田慎介君、坂本佑君、剣持典功君には、研究生生活を送る上でお世話になりました。本当にありがとうございました。

最後に、自由な研究の場を提供し、陰ながら支えてくれた両親、家族に深く感謝します。

付 録 A 相対論的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

銀河団プラズマが高温である事を考えると、電子の分布は、フェルミ分布関数を相対論的マクスウェル分布と近似できる。電子が温度 T_e を持つとすると、

$$\begin{aligned} f(E) &= \left(e^{[(E-m)-(\mu-m)]/k_B T_e} + 1 \right)^{-1} \\ &\approx e^{-[(E-m)-(\mu-m)]/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

となる。 $(\mu - m)$ は、電子の非相対論的な化学ポテンシャルを表す。マクスウェル分布には化学ポテンシャルを含むので、この化学ポテンシャルを観測で求まる量で表す事を考える。付録 C.2 より電子数を N_e とすると、

$$e^{(\mu-m)/k_B T_e} = N_e \frac{\pi^2}{m\sqrt{2m}} \frac{1}{(k_B T_e)^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \tilde{f}(\theta_e) \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{f}(\theta_e) = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_e^{3/2} \left\{ \int du \sqrt{u^3 \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} + \frac{1}{\theta_e} \int du \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \right\} \right]^{-1} \quad (\text{A.3})$$

$$\simeq \left[1 + \frac{15}{8} \theta_e + \frac{105}{128} \theta_e^2 - \frac{315}{1024} \theta_e^3 + \frac{10395}{32768} \theta_e^4 - \frac{135135}{262144} \theta_e^5 \right]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

となる。ここで、 $\theta_e = k_B T_e / m$ 、 $u = (E - m) / k_B T_e$ である。(2.34), (2.35) 式より、(2.28) 式中の $f(E')$ を考えると、 $E' = E + \omega - \omega'$ より、

$$\begin{aligned} f(E') &\simeq e^{-(E'-m)/k_B T_e} e^{(\mu-m)/k_B T_e} \\ \therefore f(E') &= f(E) e^{-(\omega-\omega')/k_B T_e} = f(E) e^{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。これを用いて、(2.28) 式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \\ &\times \{ n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

となる。(2.29) 式から W を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p' d^3 k' \bar{X}}{2\omega\omega' E E'} \delta^4(p+k-p'-k') f(E) \\ &\times \{n(\omega)[1+n(\omega')] - n(\omega')[1+n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。ここで付録 C.3 より、積分中の $d^3 p'/2E'$ は、

$$\int \frac{d^3 p'}{2E'} \delta^4(p+k-p'-k') = \delta[(p+k-k')^2 - m^2] \quad (\text{A.8})$$

と変形できる。また、今は自然単位系を考えているので

$$\begin{aligned} d^3 k' &= k'^2 dk' d\Omega_{k'} \\ &= \omega'^2 d\omega' d\Omega_{\omega'} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

である。(A.8), (A.9) 式を (A.6) 式に用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega E} d\Omega_{k'} \int d\omega' \omega' \delta[(p+k-k')^2 - m^2] f(E) \bar{X} \\ &\times \{n(\omega)[1+n(\omega')] - n(\omega')[1+n(\omega)] e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

と変形する事ができる。ここで、 $\mathbf{k} = \omega$ であり、 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned} (p+k-k')^2 - m^2 &= p \cdot p + k \cdot k + k' \cdot k' + 2p \cdot k - 2p \cdot k' - 2k \cdot k' - m^2 \\ &= E^2 - |\mathbf{p}|^2 + \omega^2 - |\mathbf{k}|^2 + \omega'^2 - |\mathbf{k}'|^2 + 2(E\omega - |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \alpha) \\ &\quad - 2(E\omega' - |\mathbf{p}||\mathbf{k}'| \cos \alpha') - 2(\omega\omega' - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta) - m^2 \\ &= E^2 - (p^2 + m^2) + 2\omega(E - p \cos \alpha) \\ &\quad - 2\omega'(E - p \cos \alpha' + \omega(1 - \cos \theta)) \\ &= 2\omega(E - p \cos \alpha) - 2\omega'(E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha') \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

となる。よって、 δ 関数は、

$$\begin{aligned} \delta[(p+k-k')^2 - m^2] &= \delta \left[-2(E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha') \left(\omega' - \frac{\omega(E - p \cos \alpha)}{E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha'} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha'} \delta \left[\omega' - \frac{\omega(E - p \cos \alpha)}{E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha'} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となる。これを (A.10) 式に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & -2 \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega E} d\Omega_{k'} \frac{1}{2} \frac{\omega'}{E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha'} f(E) \overline{X} \\ & \times \{n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)]e^{\Delta x}\}_{\omega' = \frac{\omega(E - p \cos \alpha)}{E + \omega(1 - \cos \theta) - p \cos \alpha'}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

となる。ここで、 p を z-x 平面に固定して考えると、積分変数は、

$$\int d^3 p \int d\Omega_{k'} = 2\pi \int dp p^2 \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (\text{A.14})$$

となる。また、トムソン散乱断面積、 $\sigma_T = 8\pi/3(e^2/4\pi m)^2$ を用いると、(A.13) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & \sigma_T \left(-\frac{3}{8\pi} \right) 2\pi \int \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \left(\frac{m}{E} \right)^2 \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \\ & \times \frac{\overline{X}}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta) - \frac{p}{E} \cos \alpha'} \{n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)]e^{\Delta x}\}_{\omega'} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

と変形される。(A.2) 式より、

$$\int dp p^2 f(E) = N_e \theta_e^{\frac{3}{2}} \pi^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{f}(\theta_e) \int du \left(u + \frac{1}{\theta_e} \right) \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \quad (\text{A.16})$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & \sigma_T N_e \theta_e^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{f}(\theta_e) \int du \left(\frac{m}{E} \right)^2 \left(u + \frac{1}{\theta_e} \right) \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \\ & \times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega'}{\omega} \\ & \times \frac{\overline{X}}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta) - \frac{p}{E} \cos \alpha'} \{n(\omega)[1 + n(\omega')] - n(\omega')[1 + n(\omega)]e^{\Delta x}\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

という式を得る事ができる。また、展開式を計算するさいの I_k については、(A.17) 式の $\{ \}$ を $(\Delta x)^k$ に変更し、係数を $-1/2k!$ で割ったものになる。すなわち、

$$\begin{aligned} I_k = & -\sigma_T N_e \theta_e^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{4} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{f}(\theta_e) \frac{1}{k!} \int du \left(\frac{m}{E} \right)^2 \left(u + \frac{1}{\theta_e} \right) \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \\ & \times \frac{1}{2} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\omega'}{\omega} \frac{\overline{X}}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta) - \frac{p}{E} \cos \alpha'} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる。ここで、 $\theta_e u \equiv t$ とし、

$$Const \equiv -\sigma_T N_e \theta_e^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{3}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tilde{f}(\theta_e) \quad (\text{A.19})$$

とすると、(A.18) 式は、

$$\begin{aligned} I_k = Const & \times \theta_e^{-3} \frac{1}{k!} \int dt \left(\frac{m}{E}\right)^2 (t+1) \sqrt{t(t+2)} e^{-t/\theta_e} \\ & \times \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ & \times \frac{\omega'}{\omega} \frac{\overline{X}(\Delta x)^k}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta) - \frac{p}{E} \cos \alpha'} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

となる。ここで、 $t = K/m$, $K = E - m$ より t が十分小さいと考えると、

$$\begin{aligned} \frac{m}{E} &= \frac{1}{1+t} \simeq 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \\ \frac{p}{E} &= \frac{\sqrt{t(t+2)}}{1+t} \simeq \sqrt{2}\sqrt{\pi} - \frac{3t^{3/2}}{2\sqrt{2}} + \frac{23t^{5/2}}{16\sqrt{2}} + \dots \\ \frac{\omega}{E} &= x\theta_e \frac{m}{E} \simeq x\theta_e (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

と展開する事ができる。これを元に、

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1 - \frac{p}{E} \cos \alpha}{1 + \frac{\omega}{E}(1 - \cos \theta) - \frac{p}{E} \cos \alpha'} \quad (\text{A.22})$$

$$\Delta x = x \left(\frac{\omega'}{\omega} - 1 \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{2m^2}{\kappa} = -\frac{1}{x\theta_e} \frac{m}{E} \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \alpha} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{2m^2}{\kappa'} = \frac{\omega}{\omega'} \frac{1}{x\theta_e} \frac{m}{E} \frac{1}{1 - \frac{p}{E} \cos \alpha'} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \overline{X} &= -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + 4m^4 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)^2 - 4m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right) \\ &= -\left(\frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa}\right) + \left\{2m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)\right\}^2 - 2\left\{2m^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'}\right)\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

などを計算することが出来る。ここで $\cos \alpha'$ については、加法定理、

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi \quad (\text{A.27})$$

を用いて計算する。さて数値積分を行う際は、(A.21) 式を展開する前の形で積分を行い。展開計算する際は、 t のべき級数で代入し Mathematica を用いて計算を進めて行く事にな

る。ただし、Mathematica を用いても、そのまま代入するだけでは、数式が複雑になり計算が進まなくなってしまうので、少しずつ整理しながら計算を行う必要がある。

最後にこの計算から得られる $Y_0 \sim Y_{10}$, $Z_0 \sim Z_{10}$ の各項を記しておく。

$$Y_0 = -4 + \tilde{X} \quad (\text{A.28})$$

$$Y_1 = -10 + \frac{47}{2}\tilde{X} - \frac{42}{5}\tilde{X}^2 + \frac{7}{10}\tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left(-\frac{21}{5} + \frac{7}{5}\tilde{X} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} Y_2 = & -\frac{15}{2} + \frac{1023}{8}\tilde{X} - \frac{868}{5}\tilde{X}^2 + \frac{329}{5}\tilde{X}^3 - \frac{44}{5}\tilde{X}^4 + \frac{11}{30}\tilde{X}^5 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{434}{5} + \frac{658}{5}\tilde{X} - \frac{242}{5}\tilde{X}^2 + \frac{143}{30}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{44}{5} + \frac{187}{60}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} Y_3 = & \frac{15}{2} + \frac{2505}{8}\tilde{X} - \frac{7098}{5}\tilde{X}^2 + \frac{14253}{10}\tilde{X}^3 - \frac{18594}{35}\tilde{X}^4 \\ & + \frac{12059}{140}\tilde{X}^5 - \frac{128}{21}\tilde{X}^6 + \frac{16}{105}\tilde{X}^7 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{3549}{5} + \frac{14253}{5}\tilde{X} - \frac{102267}{35}\tilde{X}^2 + \frac{156767}{140}\tilde{X}^3 - \frac{1216}{7}\tilde{X}^4 + \frac{64}{7}\tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{18594}{35} + \frac{205003}{280}\tilde{X} - \frac{1920}{7}\tilde{X}^2 + \frac{1024}{35}\tilde{X}^3 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left(-\frac{544}{21} + \frac{992}{105}\tilde{X} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} Y_4 = & -\frac{135}{32} + \frac{30375}{128}\tilde{X} - \frac{62391}{10}\tilde{X}^2 + \frac{614727}{40}\tilde{X}^3 - \frac{124389}{10}\tilde{X}^4 \\ & + \frac{355703}{80}\tilde{X}^5 - \frac{16568}{21}\tilde{X}^6 + \frac{7516}{105}\tilde{X}^7 - \frac{22}{7}\tilde{X}^8 + \frac{11}{210}\tilde{X}^9 \\ & + \tilde{S}^2 \left(-\frac{62391}{20} + \frac{614727}{20}\tilde{X} - \frac{1368279}{20}\tilde{X}^2 + \frac{4624139}{80}\tilde{X}^3 - \frac{157396}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ & \left. + \frac{30064}{7}\tilde{X}^5 - \frac{2717}{7}\tilde{X}^6 + \frac{2761}{210}\tilde{X}^7 \right) \\ & + \tilde{S}^4 \left(-\frac{124389}{10} + \frac{6046951}{160}\tilde{X} - \frac{248520}{7}\tilde{X}^2 + \frac{481024}{35}\tilde{X}^3 - \frac{15972}{7}\tilde{X}^4 \right. \\ & \left. + \frac{18689}{140}\tilde{X}^5 \right) \\ & + \tilde{S}^6 \left(-\frac{70414}{21} + \frac{465992}{105}\tilde{X} - \frac{11792}{7}\tilde{X}^2 + \frac{19778}{105}\tilde{X}^3 \right) \end{aligned}$$

$$+ \tilde{S}^8 \left(-\frac{682}{7} + \frac{7601}{210} \tilde{X} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned}
Y_5 = & -\frac{45}{8} - \frac{7515}{32} \tilde{X} - \frac{28917}{2} \tilde{X}^2 + \frac{795429}{8} \tilde{X}^3 - \frac{2319993}{14} \tilde{X}^4 + \frac{12667283}{112} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{806524}{21} \tilde{X}^6 + \frac{21310}{3} \tilde{X}^7 - \frac{46679}{63} \tilde{X}^8 + \frac{10853}{252} \tilde{X}^9 - \frac{58}{45} \tilde{X}^{10} + \frac{29}{1890} \tilde{X}^{11} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{28917}{4} + \frac{795429}{4} \tilde{X} - \frac{25519923}{28} \tilde{X}^2 + \frac{164674679}{112} \tilde{X}^3 - \frac{7661978}{7} \tilde{X}^4 \right. \\
& \left. + 426200 \tilde{X}^5 - \frac{11529713}{126} \tilde{X}^6 + \frac{2724103}{252} \tilde{X}^7 - \frac{29377}{45} \tilde{X}^8 + \frac{14761}{945} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{2319993}{14} + \frac{215343811}{224} \tilde{X} - \frac{12097860}{7} \tilde{X}^2 + 1363840 \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{11296318}{21} \tilde{X}^4 + \frac{18439247}{168} \tilde{X}^5 - \frac{494392}{45} \tilde{X}^6 + \frac{400171}{945} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{3427727}{21} + \frac{1321220}{3} \tilde{X} - \frac{25019944}{63} \tilde{X}^2 + \frac{9756847}{63} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{2407609}{90} \tilde{X}^4 + \frac{3149197}{1890} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{1447049}{63} + \frac{7499423}{252} \tilde{X} - \frac{513242}{45} \tilde{X}^2 + \frac{4973819}{3780} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{20039}{45} + \frac{158369}{945} \tilde{X} \right) \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_6 = & \frac{7425}{256} + \frac{128655}{1024} \tilde{X} - \frac{360675}{32} \tilde{X}^2 + \frac{50853555}{128} \tilde{X}^3 - \frac{45719721}{32} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{458203107}{256} \tilde{X}^5 - \frac{22251961}{21} \tilde{X}^6 + \frac{71548297}{210} \tilde{X}^7 - \frac{26865067}{420} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{7313155}{1008} \tilde{X}^9 - \frac{4492}{9} \tilde{X}^{10} + \frac{6361}{315} \tilde{X}^{11} - \frac{296}{675} \tilde{X}^{12} + \frac{37}{9450} \tilde{X}^{13} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{360675}{64} + \frac{50853555}{64} \tilde{X} - \frac{502916931}{64} \tilde{X}^2 + \frac{5956640391}{256} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{422787259}{14} \tilde{X}^4 + \frac{143096594}{7} \tilde{X}^5 - \frac{6635671549}{840} \tilde{X}^6 + \frac{1835601905}{1008} \tilde{X}^7 \right. \\
& \left. - \frac{2275198}{9} \tilde{X}^8 + \frac{6475498}{315} \tilde{X}^9 - \frac{201428}{225} \tilde{X}^{10} + \frac{50431}{3150} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{45719721}{32} + \frac{7789452819}{512} \tilde{X} - \frac{333779415}{7} \tilde{X}^2 + \frac{2289545504}{35} \tilde{X}^3 \right. \\
& \left. - \frac{3250673107}{70} \tilde{X}^4 + \frac{12425050345}{672} \tilde{X}^5 - \frac{38289808}{9} \tilde{X}^6 \right. \\
& \left. + \frac{175550878}{315} \tilde{X}^7 - \frac{344840}{9} \tilde{X}^8 + \frac{1343507}{1260} \tilde{X}^9 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{378283337}{84} + \frac{2217997207}{105} \tilde{X} - \frac{3599918978}{105} \tilde{X}^2 + \frac{6574526345}{252} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{93232583}{9} \tilde{X}^4 + \frac{690760073}{315} \tilde{X}^5 - \frac{31433128}{135} \tilde{X}^6 + \frac{9151432}{945} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{832817077}{420} + \frac{5053390105}{1008} \tilde{X} - \frac{39749708}{9} \tilde{X}^2 + \frac{1090981471}{630} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{13818464}{45} \tilde{X}^4 + \frac{12565681}{630} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{1551986}{9} + \frac{69474842}{315} \tilde{X} - \frac{19157638}{225} \tilde{X}^2 + \frac{63282617}{6300} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{1616456}{675} + \frac{34394053}{37800} \tilde{X} \right) \tag{A.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_7 = & -\frac{675}{8} + \frac{6345}{32} \tilde{X} + \frac{86751}{8} \tilde{X}^2 + \frac{28579473}{32} \tilde{X}^3 - \frac{463090581}{56} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{8680356807}{448} \tilde{X}^5 - \frac{407333911}{21} \tilde{X}^6 + \frac{304758409}{30} \tilde{X}^7 - \frac{14281971623}{4620} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{32154229291}{55440} \tilde{X}^9 - \frac{34276642}{495} \tilde{X}^{10} + \frac{36841447}{6930} \tilde{X}^{11} - \frac{1927084}{7425} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{229693}{29700} \tilde{X}^{13} - \frac{736}{5775} \tilde{X}^{14} + \frac{46}{51975} \tilde{X}^{15} \\
& + \tilde{S}^2 \left(\frac{86751}{16} + \frac{28579473}{16} \tilde{X} - \frac{5093996391}{112} \tilde{X}^2 + \frac{112844638491}{448} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad - \frac{7739344309}{14} \tilde{X}^4 + 609516818 \tilde{X}^5 - \frac{3527646990881}{9240} \tilde{X}^6 + \frac{8070711552041}{55440} \tilde{X}^7 \\
& \quad - \frac{17361119173}{495} \tilde{X}^8 + \frac{18752296523}{3465} \tilde{X}^9 - \frac{1311380662}{2475} \tilde{X}^{10} + \frac{313071559}{9900} \tilde{X}^{11} \\
& \quad \left. - \frac{6023792}{5775} \tilde{X}^{12} + \frac{753296}{51975} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{463090581}{56} + \frac{147566065719}{896} \tilde{X} - \frac{6110008665}{7} \tilde{X}^2 + \frac{9752269088}{5} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad - \frac{157101687853}{70} \tilde{X}^4 + \frac{54630035565409}{36960} \tilde{X}^5 - \frac{292174096408}{495} \tilde{X}^6 \\
& \quad + \frac{508375127153}{3465} \tilde{X}^7 - \frac{2245052860}{99} \tilde{X}^8 + \frac{758216593}{360} \tilde{X}^9 \\
& \quad \left. - \frac{18723104}{175} \tilde{X}^{10} + \frac{39369376}{17325} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{6924676487}{84} + \frac{9447510679}{15} \tilde{X} - \frac{1913784197482}{1155} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad + \frac{28906652132609}{13860} \tilde{X}^3 - \frac{1422840547741}{990} \tilde{X}^4 + \frac{4000723254071}{6930} \tilde{X}^5 \\
& \quad \left. - \frac{204642831212}{1485} \tilde{X}^6 + \frac{28405673924}{1485} \tilde{X}^7 - \frac{1636707416}{1155} \tilde{X}^8 + \frac{447793256}{10395} \tilde{X}^9 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{442741120313}{4620} + \frac{22218572440081}{55440} \tilde{X} - \frac{303314005058}{495} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{6318713416417}{13860} \tilde{X}^3 - \frac{8178544496}{45} \tilde{X}^4 + \frac{78006728809}{1980} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{5023602592}{1155} \tilde{X}^6 + \frac{1979052664}{10395} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{11842579811}{495} + \frac{201191142067}{3465} \tilde{X} - \frac{124724248877}{2475} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{392853355313}{19800} \tilde{X}^3 - \frac{627352048}{175} \tilde{X}^4 + \frac{4157703008}{17325} \tilde{X}^5 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{10523805724}{7425} + \frac{213515492317}{118800} \tilde{X} - \frac{4029609568}{5775} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{4350781384}{51975} \tilde{X}^3 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{85520348}{5775} + \frac{294610772}{51975} \tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
Y_8 = & \frac{1905525}{8192} - \frac{31843125}{32768} \tilde{X} - \frac{1274427}{256} \tilde{X}^2 + \frac{723764619}{1024} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{56131109271}{1792} \tilde{X}^4 + \frac{2131228533597}{14336} \tilde{X}^5 - \frac{28385005515}{112} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{33759855933}{160} \tilde{X}^7 - \frac{7332664403233}{73920} \tilde{X}^8 + \frac{8454102129551}{295680} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{159273899}{30} \tilde{X}^{10} + \frac{3623853049}{5544} \tilde{X}^{11} - \frac{133798003}{2475} \tilde{X}^{12} + \frac{118712629}{39600} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{631168}{5775} \tilde{X}^{14} + \frac{1312}{525} \tilde{X}^{15} - \frac{16}{495} \tilde{X}^{16} + \frac{4}{22275} \tilde{X}^{17} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{1274427}{512} + \frac{723764619}{512} \tilde{X} - \frac{617442201981}{3584} \tilde{X}^2 + \frac{27705970936761}{14336} \tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{1617945314355}{224} \tilde{X}^4 + \frac{101279567799}{8} \tilde{X}^5 - \frac{1811168107598551}{147840} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{2121979634517301}{295680} \tilde{X}^7 - \frac{161344459687}{60} \tilde{X}^8 + \frac{1844541201941}{2772} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{182099082083}{1650} \tilde{X}^{10} + \frac{161805313327}{13200} \tilde{X}^{11} - \frac{5165794496}{5775} \tilde{X}^{12} \\
& \left. + \frac{21485312}{525} \tilde{X}^{13} - \frac{524152}{495} \tilde{X}^{14} + \frac{23828}{2025} \tilde{X}^{15} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{56131109271}{1792} + \frac{36230885071149}{28672} \tilde{X} - \frac{1277325248175}{112} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{202559135598}{5} \tilde{X}^3 - \frac{80659308435563}{1120} \tilde{X}^4 + \frac{14363519518107149}{197120} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{678825357538}{15} \tilde{X}^6 + \frac{50005548223151}{2772} \tilde{X}^7 - \frac{155874673495}{33} \tilde{X}^8 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{391870388329}{480} \tilde{X}^9 - \frac{16056282752}{175} \tilde{X}^{10} + \frac{1122883072}{175} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{124946368}{495} \tilde{X}^{12} + \frac{94627042}{22275} \tilde{X}^{13} \Big) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{482545093755}{448} + \frac{1046555533923}{80} \tilde{X} - \frac{491288515016611}{9240} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{7600237814466349}{73920} \tilde{X}^3 - \frac{13223078368879}{120} \tilde{X}^4 + \frac{393525074150057}{5544} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{14208411332579}{495} \tilde{X}^6 + \frac{3670238350793}{495} \tilde{X}^7 - \frac{1403583351008}{1155} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{12771842432}{105} \tilde{X}^9 - \frac{3341029504}{495} \tilde{X}^{10} + \frac{320768096}{2025} \tilde{X}^{11} \Big) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{227312596500223}{73920} + \frac{5841784571519741}{295680} \tilde{X} - \frac{1409414732251}{30} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{621530660287039}{11088} \tilde{X}^3 - \frac{567838724732}{15} \tilde{X}^4 + \frac{40316352072577}{2640} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{4308066848896}{1155} \tilde{X}^6 + \frac{56446023808}{105} \tilde{X}^7 - \frac{4142724512}{99} \tilde{X}^8 + \frac{6013663016}{4455} \tilde{X}^9 \Big) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{110058264209}{60} + \frac{19789861500589}{2772} \tilde{X} - \frac{34638563602661}{3300} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{203039076596489}{26400} \tilde{X}^3 - \frac{537995295424}{175} \tilde{X}^4 + \frac{118584920576}{175} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{38077243744}{495} \tilde{X}^6 + \frac{7075408016}{2025} \tilde{X}^7 \Big) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{730670894383}{2475} + \frac{110351579826901}{158400} \tilde{X} - \frac{3455653005184}{5775} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{124091851648}{525} \tilde{X}^3 - \frac{1949035328}{45} \tilde{X}^4 + \frac{66076862872}{22275} \tilde{X}^5 \Big) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{73339275824}{5775} + \frac{8402811584}{525} \tilde{X} - \frac{3089759392}{495} \tilde{X}^2 + \frac{16899213088}{22275} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{16} \left(-\frac{51236656}{495} + \frac{887722324}{22275} \tilde{X} \right) \tag{A.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_9 = & -\frac{91125}{128} + \frac{1451925}{512} \tilde{X} - \frac{95823}{8} \tilde{X}^2 - \frac{21387969}{32} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{3867907059}{56} \tilde{X}^4 + \frac{361018793313}{448} \tilde{X}^5 - \frac{68346357865}{28} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{129419653687}{40} \tilde{X}^7 - \frac{14191595238489}{6160} \tilde{X}^8 + \frac{72688716977749}{73920} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{1153370108027}{4290} \tilde{X}^{10} + \frac{393223901251}{8008} \tilde{X}^{11} - \frac{197855054569}{32175} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{275619041167}{514800} \tilde{X}^{13} - \frac{813344128}{25025} \tilde{X}^{14} + \frac{102350176}{75075} \tilde{X}^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{248008}{6435}\tilde{X}^{16} + \frac{22448}{32175}\tilde{X}^{17} - \frac{268}{36855}\tilde{X}^{18} + \frac{67}{2027025}\tilde{X}^{19}) \\
+ \tilde{S}^2 & \left(-\frac{95823}{16}\tilde{X} - \frac{21387969}{16}\tilde{X} - \frac{42546977649}{112}\tilde{X}^2 + \frac{4693244313069}{448}\tilde{X}^3 \right. \\
& - \frac{3895742398305}{56}\tilde{X}^4 + \frac{388258961061}{2}\tilde{X}^5 - \frac{3505324023906783}{12320}\tilde{X}^6 \\
& + \frac{18244867961414999}{73920}\tilde{X}^7 - \frac{1168363919431351}{8580}\tilde{X}^8 + \frac{200150965736759}{4004}\tilde{X}^9 \\
& - \frac{269280729268409}{21450}\tilde{X}^{10} + \frac{375668753110621}{171600}\tilde{X}^{11} - \frac{6656815015616}{25025}\tilde{X}^{12} \\
& + \frac{1676086482176}{75075}\tilde{X}^{13} - \frac{8124618076}{6435}\tilde{X}^{14} + \frac{133722736}{2925}\tilde{X}^{15} \\
& \left. - \frac{780550}{819}\tilde{X}^{16} + \frac{1951442}{225225}\tilde{X}^{17} \right) \\
+ \tilde{S}^4 & \left(-\frac{3867907059}{56}\tilde{X} + \frac{6137319486321}{896}\tilde{X} - \frac{3075586103925}{28}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{3106071688488}{5}\tilde{X}^3 - \frac{468322642870137}{280}\tilde{X}^4 + \frac{123498130145195551}{49280}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{4915663400411074}{2145}\tilde{X}^6 + \frac{5426096613362549}{4004}\tilde{X}^7 - \frac{230501138572885}{429}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{909818454892267}{6240}\tilde{X}^9 - \frac{62071983816576}{2275}\tilde{X}^{10} + \frac{87597012230656}{25025}\tilde{X}^{11} \\
& - \frac{1936731177184}{6435}\tilde{X}^{12} + \frac{531046959704}{32175}\tilde{X}^{13} - \frac{6383914904}{12285}\tilde{X}^{14} \\
& \left. + \frac{48599522}{6825}\tilde{X}^{15} \right) \\
+ \tilde{S}^6 & \left(-\frac{1161888083705}{112}\tilde{X} + \frac{4012009264297}{20}\tilde{X} - \frac{950836880978763}{770}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{65347156562996351}{18480}\tilde{X}^3 - \frac{95753939738509567}{17160}\tilde{X}^4 + \frac{42701363108549843}{8008}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{21010821809845817}{6435}\tilde{X}^6 + \frac{8521313895760139}{6435}\tilde{X}^7 - \frac{1808704301708768}{5005}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{996341707895936}{15015}\tilde{X}^9 - \frac{51787627826752}{6435}\tilde{X}^{10} + \frac{1800150554752}{2925}\tilde{X}^{11} \\
& \left. - \frac{15664038473}{585}\tilde{X}^{12} + \frac{9717618829}{19305}\tilde{X}^{13} \right) \\
+ \tilde{S}^8 & \left(-\frac{439939452393159}{6160}\tilde{X} + \frac{50227903431624559}{73920}\tilde{X} - \frac{10206172085930923}{4290}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{67442224527460261}{16016}\tilde{X}^3 - \frac{839696851590836}{195}\tilde{X}^4 + \frac{93603809427848371}{34320}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{5551518572838016}{5005}\tilde{X}^6 + \frac{4403399749427584}{15015}\tilde{X}^7 - \frac{64214301298256}{1287}\tilde{X}^8 \\
& \left. + \frac{33748676845792}{6435}\tilde{X}^9 - \frac{180525698872}{585}\tilde{X}^{10} + \frac{498306362599}{64350}\tilde{X}^{11} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{796978744646657}{8580} + \frac{2147395724731711}{4004} \tilde{X} - \frac{51222101512204703}{42900} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{471402546488607947}{343200} \tilde{X}^3 - \frac{2079836023490112}{2275} \tilde{X}^4 + \frac{9250905100533248}{25025} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{590216316653872}{6435} \tilde{X}^6 + \frac{39707189785792}{2925} \tilde{X}^7 - \frac{1921573868732}{1755} \tilde{X}^8 \\
& \left. + \frac{395481352652}{10725} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{1080486453001309}{32175} + \frac{256206916478567023}{2059200} \tilde{X} - \frac{4453069674273664}{25025} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{9680505225867904}{75075} \tilde{X}^3 - \frac{30211022101664}{585} \tilde{X}^4 + \frac{370823354437664}{32175} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{468962511088}{351} \tilde{X}^6 + \frac{6024995840752}{96525} \tilde{X}^7 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{94507435965104}{25025} + \frac{655510094906432}{75075} \tilde{X} - \frac{47892815455696}{6435} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{94838383849856}{32175} \tilde{X}^3 - \frac{745401953564}{1365} \tilde{X}^4 + \frac{8575833693404}{225225} \tilde{X}^5 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{16} \left(-\frac{794193786328}{6435} + \frac{4981897682288}{32175} \tilde{X} - \frac{57273525044}{945} \tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{7451199109}{1001} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{18} \left(-\frac{29738697854}{36855} + \frac{632763613814}{2027025} \tilde{X} \right) \tag{A.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{10} = & \frac{169255575}{65536} - \frac{2090024775}{262144} \tilde{X} + \frac{433967625}{8192} \tilde{X}^2 + \frac{8992650375}{32768} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{3162934444995}{57344} \tilde{X}^4 + \frac{1353148643034945}{458752} \tilde{X}^5 - \frac{15614127041155}{896} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{9649428040913}{256} \tilde{X}^7 - \frac{1600697595147911}{39424} \tilde{X}^8 + \frac{11942478518370683}{473088} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{135515512037513}{13728} \tilde{X}^{10} + \frac{985744536107759}{384384} \tilde{X}^{11} - \frac{330716455601941}{720720} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{667649235923203}{11531520} \tilde{X}^{13} - \frac{3734552464}{715} \tilde{X}^{14} + \frac{1173672524}{3465} \tilde{X}^{15} - \frac{101283718}{6435} \tilde{X}^{16} \\
& + \frac{46573313}{90090} \tilde{X}^{17} - \frac{231496}{19845} \tilde{X}^{18} + \frac{486254}{2837835} \tilde{X}^{19} - \frac{632}{429975} \tilde{X}^{20} + \frac{79}{14189175} \tilde{X}^{21} \\
& + \tilde{S}^2 \left(\frac{433967625}{16384} + \frac{8992650375}{16384} \tilde{X} - \frac{34792278894945}{114688} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{17590932359454285}{458752} \tilde{X}^3 - \frac{890005241345835}{1792} \tilde{X}^4 + \frac{144741420613695}{64} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{395372306001534017}{78848} \tilde{X}^6 + \frac{2997562108111041433}{473088} \tilde{X}^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{137277213694000669}{27456}\tilde{X}^8 + \frac{501743968878849331}{192192}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{450105096074241701}{480480}\tilde{X}^{10} + \frac{910005908563325689}{3843840}\tilde{X}^{11} - \frac{30565444641608}{715}\tilde{X}^{12} \\
& + \frac{19220061253024}{3465}\tilde{X}^{13} - \frac{3318003959821}{6435}\tilde{X}^{14} + \frac{39633889363}{1170}\tilde{X}^{15} \\
& - \frac{674232100}{441}\tilde{X}^{16} + \frac{14162634004}{315315}\tilde{X}^{17} - \frac{66268676}{85995}\tilde{X}^{18} + \frac{2366761}{405405}\tilde{X}^{19} \Big) \\
+ & \tilde{S}^4 \Big(-\frac{3162934444995}{57344} + \frac{23003526931594065}{917504}\tilde{X} - \frac{702635716851975}{896}\tilde{X}^2 \\
& + \frac{28948284122739}{4}\tilde{X}^3 - \frac{52823020639881063}{1792}\tilde{X}^4 + \frac{20290271002711790417}{315392}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{288783556151940203}{3432}\tilde{X}^6 + \frac{13602288853750966441}{192192}\tilde{X}^7 \\
& - \frac{1926423353881306325}{48048}\tilde{X}^8 + \frac{2203910127782493103}{139776}\tilde{X}^9 \\
& - \frac{285009840395088}{65}\tilde{X}^{10} + \frac{1004494671700544}{1155}\tilde{X}^{11} \\
& - \frac{790939543852264}{6435}\tilde{X}^{12} + \frac{2203547422665073}{180180}\tilde{X}^{13} - \frac{5514368524688}{6615}\tilde{X}^{14} \\
& + \frac{352712118964}{9555}\tilde{X}^{15} - \frac{100090472}{105}\tilde{X}^{16} + \frac{6847741883}{630630}\tilde{X}^{17} \Big) \\
+ & \tilde{S}^6 \Big(-\frac{265440159699635}{3584} + \frac{299132269268303}{128}\tilde{X} - \frac{107246738874910037}{4928}\tilde{X}^2 \\
& + \frac{10736288188015244017}{118272}\tilde{X}^3 - \frac{11250633324866366773}{54912}\tilde{X}^4 \\
& + \frac{107044956409549873087}{384384}\tilde{X}^5 - \frac{35119772569736920613}{144144}\tilde{X}^6 \\
& + \frac{20641711427037667151}{144144}\tilde{X}^7 - \frac{8304850153899284}{143}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{11425274804341264}{693}\tilde{X}^9 - \frac{21149493132050992}{6435}\tilde{X}^{10} \\
& + \frac{1867404116927756}{4095}\tilde{X}^{11} - \frac{13530456158006}{315}\tilde{X}^{12} + \frac{70525836210098}{27027}\tilde{X}^{13} \\
& - \frac{2634688733384}{28665}\tilde{X}^{14} + \frac{1344669065548}{945945}\tilde{X}^{15} \Big) \\
+ & \tilde{S}^8 \Big(-\frac{49621625449585241}{39424} + \frac{8252252656194141953}{473088}\tilde{X} \\
& - \frac{1199176766019952537}{13728}\tilde{X}^2 + \frac{169066031132377853849}{768768}\tilde{X}^3 \\
& - \frac{350890159393659401}{1092}\tilde{X}^4 + \frac{226742359959586740439}{768768}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{25490363366997808}{143}\tilde{X}^6 + \frac{50494776854039216}{693}\tilde{X}^7 - \frac{26224408826568476}{1287}\tilde{X}^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{35009526240086501}{9009} \tilde{X}^9 - \frac{155936482037584}{315} \tilde{X}^{10} + \frac{1808234791337419}{45045} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{1092354818536}{585} \tilde{X}^{12} + \frac{5108388422768}{135135} \tilde{X}^{13} \Big) \\
& + \tilde{S}^{10} \Big(-\frac{93641218817921483}{27456} + \frac{5383150911684471899}{192192} \tilde{X} \\
& - \frac{85618191041419699667}{960960} \tilde{X}^2 + \frac{1141907861818126942223}{7687680} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{9549779089621656}{65} \tilde{X}^4 + \frac{106082212683516352}{1155} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{241037801099035012}{6435} \tilde{X}^6 + \frac{41190649016484626}{4095} \tilde{X}^7 - \frac{237119757098072}{135} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{2870214770932024}{15015} \tilde{X}^9 - \frac{11439343978606}{975} \tilde{X}^{10} + \frac{19889903014249}{64350} \tilde{X}^{11} \Big) \\
& + \tilde{S}^{12} \Big(-\frac{1806042564042199801}{720720} + \frac{620626032587895889507}{46126080} \tilde{X} \\
& - \frac{20446723289582032}{715} \tilde{X}^2 + \frac{111008534094162896}{3465} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{12337846533324344}{585} \tilde{X}^4 + \frac{384677302074466867}{45045} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{405085617413536}{189} \tilde{X}^6 + \frac{6246648886032032}{19305} \tilde{X}^7 - \frac{109783051647664}{4095} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{72050541791741}{77220} \tilde{X}^9 \Big) \\
& + \tilde{S}^{14} \Big(-\frac{433940524926002}{715} + \frac{7516881921104968}{3465} \tilde{X} - \frac{19558894934198716}{6435} \tilde{X}^2 \\
& + \frac{98381542575140068}{45045} \tilde{X}^3 - \frac{643871532247208}{735} \tilde{X}^4 + \frac{62239305026156248}{315315} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{666773973312704}{28665} \tilde{X}^6 + \frac{1051014654079528}{945945} \tilde{X}^7 \Big) \\
& + \tilde{S}^{16} \Big(-\frac{324339938597938}{6435} + \frac{10336042413184853}{90090} \tilde{X} - \frac{643140654464984}{6615} \tilde{X}^2 \\
& + \frac{270386221757290}{7007} \tilde{X}^3 - \frac{68913020463512}{9555} \tilde{X}^4 + \frac{22981984955077}{45045} \tilde{X}^5 \Big) \\
& + \tilde{S}^{18} \Big(-\frac{25688020889588}{19845} + \frac{4592296093604668}{2837835} \tilde{X} \\
& - \frac{7805173973924}{12285} \tilde{X}^2 + \frac{223349568314737}{2837835} \tilde{X}^3 \Big) \\
& + \tilde{S}^{20} \Big(-\frac{2984377641272}{429975} + \frac{76502310785333}{28378350} \tilde{X} \Big) \tag{A.38}
\end{aligned}$$

$$Z_0 = -16 + 34\tilde{X} - 12\tilde{X}^2 + \tilde{X}^3 + \tilde{S}^2 \left(-6 + 2\tilde{X} \right) \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
Z_1 &= -80 + 590\tilde{X} - \frac{3492}{5}\tilde{X}^2 + \frac{1271}{5}\tilde{X}^3 - \frac{168}{5}\tilde{X}^4 + \frac{7}{5}\tilde{X}^5 \\
&+ \tilde{S}^2 \left(-\frac{1746}{5} + \frac{2542}{5}\tilde{X} - \frac{924}{5}\tilde{X}^2 + \frac{91}{5}\tilde{X}^3 \right) \\
&+ \tilde{S}^4 \left(-\frac{168}{5} + \frac{119}{10}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 &= -160 + 4792\tilde{X} - \frac{357144}{25}\tilde{X}^2 + \frac{312912}{25}\tilde{X}^3 - \frac{110196}{25}\tilde{X}^4 \\
&+ \frac{34873}{50}\tilde{X}^5 - \frac{734}{15}\tilde{X}^6 + \frac{367}{300}\tilde{X}^7 \\
&+ \tilde{S}^2 \left(-\frac{178572}{25} + \frac{625824}{25}\tilde{X} - \frac{606078}{25}\tilde{X}^2 + \frac{453349}{50}\tilde{X}^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{6973}{5}\tilde{X}^4 + \frac{367}{5}\tilde{X}^5 \right) \\
&+ \tilde{S}^4 \left(-\frac{110196}{25} + \frac{592841}{100}\tilde{X} - 2202\tilde{X}^2 + \frac{5872}{25}\tilde{X}^3 \right) \\
&+ \tilde{S}^6 \left(-\frac{6239}{30} + \frac{11377}{150}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
Z_3 &= -90 + \frac{96651}{4}\tilde{X} - \frac{8659449}{50}\tilde{X}^2 + \frac{62384943}{200}\tilde{X}^3 - \frac{38586081}{175}\tilde{X}^4 \\
&+ \frac{103117227}{1400}\tilde{X}^5 - \frac{1325008}{105}\tilde{X}^6 + \frac{590831}{525}\tilde{X}^7 - \frac{1718}{35}\tilde{X}^8 + \frac{859}{1050}\tilde{X}^9 \\
&+ \tilde{S}^2 \left(-\frac{8659449}{100} + \frac{62384943}{100}\tilde{X} - \frac{424446891}{350}\tilde{X}^2 + \frac{1340523951}{1400}\tilde{X}^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{12587576}{35}\tilde{X}^4 + \frac{2363324}{35}\tilde{X}^5 - \frac{212173}{35}\tilde{X}^6 + \frac{215609}{1050}\tilde{X}^7 \right) \\
&+ \tilde{S}^4 \left(-\frac{38586081}{175} + \frac{1752992859}{2800}\tilde{X} - \frac{3975024}{7}\tilde{X}^2 + \frac{37813184}{175}\tilde{X}^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1247268}{35}\tilde{X}^4 + \frac{1459441}{700}\tilde{X}^5 \right) \\
&+ \tilde{S}^6 \left(-\frac{5631284}{105} + \frac{36631522}{525}\tilde{X} - \frac{920848}{35}\tilde{X}^2 + \frac{1544482}{525}\tilde{X}^3 \right) \\
&+ \tilde{S}^8 \left(-\frac{53258}{35} + \frac{593569}{1050}\tilde{X} \right)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

$$\begin{aligned}
Z_4 &= 60 + 82497\tilde{X} - \frac{36883086}{25}\tilde{X}^2 + \frac{129233103}{25}\tilde{X}^3 - \frac{1154992263}{175}\tilde{X}^4 \\
&+ \frac{5504779501}{1400}\tilde{X}^5 - \frac{129898756}{105}\tilde{X}^6 + \frac{114929504}{525}\tilde{X}^7 - \frac{2337809}{105}\tilde{X}^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2681837}{2100} \tilde{X}^9 - \frac{2851}{75} \tilde{X}^{10} + \frac{2851}{6300} \tilde{X}^{11} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{18441543}{25} + \frac{258466206}{25} \tilde{X} - \frac{12704914893}{350} \tilde{X}^2 + \frac{71562133513}{1400} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad - \frac{1234038182}{35} \tilde{X}^4 + \frac{459718016}{35} \tilde{X}^5 - \frac{577438823}{210} \tilde{X}^6 + \frac{673141087}{2100} \tilde{X}^7 \\
& \quad \left. - \frac{2888063}{150} \tilde{X}^8 + \frac{1451159}{3150} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{1154992263}{175} + \frac{93581251517}{2800} \tilde{X} - \frac{389696268}{7} \tilde{X}^2 + \frac{7355488256}{175} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{565749778}{35} \tilde{X}^4 + \frac{4556441063}{1400} \tilde{X}^5 - \frac{24301924}{75} \tilde{X}^6 + \frac{39340949}{3150} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{552069713}{105} + \frac{7125629248}{525} \tilde{X} - \frac{1253065624}{105} \tilde{X}^2 + \frac{2410971463}{525} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{236692871}{300} \tilde{X}^4 + \frac{309598643}{6300} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{72472079}{105} + \frac{1853149367}{2100} \tilde{X} - \frac{25228499}{75} \tilde{X}^2 + \frac{488977861}{12600} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{1970041}{150} + \frac{15569311}{3150} \tilde{X} \right) \tag{A.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_5 = & -\frac{135}{8} + \frac{12368565}{64} \tilde{X} - \frac{1523246139}{160} \tilde{X}^2 + \frac{41024053941}{640} \tilde{X}^3 - \frac{78913341669}{560} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{124274226315}{896} \tilde{X}^5 - \frac{2505515368}{35} \tilde{X}^6 + \frac{29643451897}{1400} \tilde{X}^7 - \frac{105635617}{28} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{10436409287}{25200} \tilde{X}^9 - \frac{6284921}{225} \tilde{X}^{10} + \frac{2347649}{2100} \tilde{X}^{11} - \frac{16312}{675} \tilde{X}^{12} + \frac{2039}{9450} \tilde{X}^{13} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{1523246139}{320} + \frac{41024053941}{320} \tilde{X} - \frac{868046758359}{1120} \tilde{X}^2 + \frac{1615564942095}{896} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad - \frac{71407187988}{35} \tilde{X}^4 + \frac{88930355691}{70} \tilde{X}^5 - \frac{26091997399}{56} \tilde{X}^6 \\
& \quad + \frac{2619538731037}{25200} \tilde{X}^7 - \frac{6366624973}{450} \tilde{X}^8 + \frac{1194953341}{1050} \tilde{X}^9 \\
& \quad \left. - \frac{11100316}{225} \tilde{X}^{10} + \frac{2779157}{3150} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{78913341669}{560} + \frac{2112661847355}{1792} \tilde{X} - \frac{22549638312}{7} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad + \frac{711442845528}{175} \tilde{X}^3 - \frac{38345728971}{14} \tilde{X}^4 + \frac{17731459378613}{16800} \tilde{X}^5 \\
& \quad \left. - \frac{53572666604}{225} \tilde{X}^6 + \frac{32395208551}{1050} \tilde{X}^7 - \frac{19003480}{9} \tilde{X}^8 + \frac{74038129}{1260} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{10648440314}{35} + \frac{918947008807}{700} \tilde{X} - \frac{14155172678}{7} \tilde{X}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9382331949013}{6300} \tilde{X}^3 - \frac{521780426341}{900} \tilde{X}^4 + \frac{254938247857}{2100} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{1732220216}{135} \tilde{X}^6 + \frac{504318104}{945} \tilde{X}^7 \Big) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{3274704127}{28} + \frac{7211558817317}{25200} \tilde{X} - \frac{55615265929}{225} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{402647627639}{4200} \tilde{X}^3 - \frac{761509408}{45} \tilde{X}^4 + \frac{692470907}{630} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{4342880411}{450} + \frac{12820511189}{1050} \tilde{X} - \frac{1055741186}{225} \tilde{X}^2 + \frac{3487385299}{6300} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{89079832}{675} + \frac{1895391191}{37800} \tilde{X} \right) \tag{A.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_6 = & \frac{2310525}{8} \tilde{X} - \frac{4808540583}{100} \tilde{X}^2 + \frac{252517854951}{400} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{11473454766573}{4900} \tilde{X}^4 + \frac{143434835467311}{39200} \tilde{X}^5 - \frac{429688246765}{147} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{9794517932561}{7350} \tilde{X}^7 - \frac{72661274793}{196} \tilde{X}^8 + \frac{2312186142587}{35280} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{11845630792}{1575} \tilde{X}^{10} + \frac{2067628712}{3675} \tilde{X}^{11} - \frac{127687796}{4725} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{105557789}{132300} \tilde{X}^{13} - \frac{48128}{3675} \tilde{X}^{14} + \frac{3008}{33075} \tilde{X}^{15} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{4808540583}{200} + \frac{252517854951}{200} \tilde{X} - \frac{126208002432303}{9800} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad + \frac{1864652861075043}{39200} \tilde{X}^3 - \frac{8164076688535}{98} \tilde{X}^4 + \frac{19589035865122}{245} \tilde{X}^5 \\
& \quad - \frac{17947334873871}{392} \tilde{X}^6 + \frac{580358721789337}{35280} \tilde{X}^7 - \frac{5999811996148}{1575} \tilde{X}^8 \\
& \quad + \frac{2104846028816}{3675} \tilde{X}^9 - \frac{86891545178}{1575} \tilde{X}^{10} + \frac{143875266407}{44100} \tilde{X}^{11} \\
& \quad \left. - \frac{393903616}{3675} \tilde{X}^{12} + \frac{49259008}{33075} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{11473454766573}{4900} + \frac{2438392202944287}{78400} \tilde{X} \right. \\
& \quad - \frac{6445323701475}{49} \tilde{X}^2 + \frac{313424573841952}{1225} \tilde{X}^3 - \frac{26376042749859}{98} \tilde{X}^4 \\
& \quad + \frac{3928404256255313}{23520} \tilde{X}^5 - \frac{100972156871008}{1575} \tilde{X}^6 + \frac{57062417193776}{3675} \tilde{X}^7 \\
& \quad - \frac{148756282340}{63} \tilde{X}^8 + \frac{3832908876379}{17640} \tilde{X}^9 \\
& \quad \left. - \frac{13467610112}{1225} \tilde{X}^{10} + \frac{2574414848}{11025} \tilde{X}^{11} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{7304700195005}{588} + \frac{303630055909391}{3675} \tilde{X} - \frac{9736610822262}{49} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{2078655342185713}{8820} \tilde{X}^3 - \frac{245859028495658}{1575} \tilde{X}^4 + \frac{224530004722216}{3675} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{13559550120628}{945} \tilde{X}^6 + \frac{13054120650052}{6615} \tilde{X}^7 \\
& \left. - \frac{107026432768}{735} \tilde{X}^8 + \frac{29281785088}{6615} \tilde{X}^9 \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{2252499518583}{196} + \frac{1597720624527617}{35280} \tilde{X} - \frac{104821986878408}{1575} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{177310534011916}{3675} \tilde{X}^3 - \frac{5960977068464}{315} \tilde{X}^4 + \frac{35848797395657}{8820} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{328499926016}{735} \tilde{X}^6 + \frac{129412835072}{6615} \tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{4092665438636}{1575} + \frac{22582640792464}{3675} \tilde{X} - \frac{8264177610763}{1575} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{180539814396049}{88200} \tilde{X}^3 - \frac{451257055744}{1225} \tilde{X}^4 + \frac{271877622784}{11025} \tilde{X}^5 \left. \right) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{697303053956}{4725} + \frac{98123248362941}{529200} \tilde{X} \right. \\
& \left. - \frac{263501425664}{3675} \tilde{X}^2 + \frac{284503269632}{33075} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{5592287104}{3675} + \frac{19264982656}{33075} \tilde{X} \right) \tag{A.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_7 = & -\frac{7425}{64} + \frac{97088895}{512} \tilde{X} - \frac{1222337267253}{6400} \tilde{X}^2 + \frac{130359634505091}{25600} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{711605106982737}{22400} \tilde{X}^4 + \frac{13836548832678459}{179200} \tilde{X}^5 - \frac{15517594943657}{168} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{166674106414085}{2688} \tilde{X}^7 - \frac{3121309975423931}{123200} \tilde{X}^8 + \frac{29449145431967693}{4435200} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{31998166697201}{27720} \tilde{X}^{10} + \frac{175594056521981}{1293600} \tilde{X}^{11} - \frac{2826080185913}{259875} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{17178303350393}{29106000} \tilde{X}^{13} - \frac{1429785592}{67375} \tilde{X}^{14} + \frac{250186931}{519750} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{752408}{121275} \tilde{X}^{16} + \frac{188102}{5457375} \tilde{X}^{17} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{1222337267253}{12800} + \frac{130359634505091}{12800} \tilde{X} - \frac{7827656176810107}{44800} \tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{179875134824819967}{179200} \tilde{X}^3 - \frac{294834303929483}{112} \tilde{X}^4 + \frac{833370532070425}{224} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{770963563929710957}{246400} \tilde{X}^6 + \frac{7391735503423890943}{4435200} \tilde{X}^7 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{32414142864264613}{55440}\tilde{X}^8 + \frac{89377374769688329}{646800}\tilde{X}^9 - \frac{3846295133027593}{173250}\tilde{X}^{10} \\
& + \frac{23414027466585659}{9702000}\tilde{X}^{11} - \frac{11702080177724}{67375}\tilde{X}^{12} + \frac{2048530591028}{259875}\tilde{X}^{13} \\
& - \frac{24648509876}{121275}\tilde{X}^{14} + \frac{160074802}{70875}\tilde{X}^{15} \Big) \\
& + \tilde{S}^4 \Big(-\frac{711605106982737}{22400} + \frac{235221330155533803}{358400}\tilde{X} - \frac{232763924154855}{56}\tilde{X}^2 \\
& + \frac{166674106414085}{14}\tilde{X}^3 - \frac{103003229188989723}{5600}\tilde{X}^4 + \frac{50034098088913110407}{2956800}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{68188093231735331}{6930}\tilde{X}^6 + \frac{2423022385946815819}{646800}\tilde{X}^7 \\
& - \frac{658476683317729}{693}\tilde{X}^8 + \frac{56705579359647293}{352800}\tilde{X}^9 - \frac{109116947024664}{6125}\tilde{X}^{10} \\
& + \frac{107061993008968}{86625}\tilde{X}^{11} - \frac{5875665428384}{121275}\tilde{X}^{12} + \frac{4449883963571}{5457375}\tilde{X}^{13} \Big) \\
& + \tilde{S}^6 \Big(-\frac{263799114042169}{672} + \frac{5166897298836635}{1344}\tilde{X} - \frac{209127768353403377}{15400}\tilde{X}^2 \\
& + \frac{26474781743338956007}{1108800}\tilde{X}^3 - \frac{2656519797368324221}{110880}\tilde{X}^4 \\
& + \frac{19068285379891482733}{1293600}\tilde{X}^5 - \frac{300109933182659209}{51975}\tilde{X}^6 \\
& + \frac{531101604684100381}{363825}\tilde{X}^7 - \frac{3179538969723302}{13475}\tilde{X}^8 \\
& + \frac{1217739352621058}{51975}\tilde{X}^9 - \frac{157113582940352}{121275}\tilde{X}^{10} + \frac{15084280098448}{496125}\tilde{X}^{11} \Big) \\
& + \tilde{S}^8 \Big(-\frac{96760609238141861}{123200} + \frac{20349359493489675863}{4435200}\tilde{X} \\
& - \frac{283151777103531649}{27720}\tilde{X}^2 + \frac{30116312228141483291}{2587200}\tilde{X}^3 \\
& - \frac{11993884309014772}{1575}\tilde{X}^4 + \frac{5833975135737017909}{1940400}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{9759068758118824}{13475}\tilde{X}^6 + \frac{5381881655364502}{51975}\tilde{X}^7 \\
& - \frac{194813691539056}{24255}\tilde{X}^8 + \frac{282795510158908}{1091475}\tilde{X}^9 \Big) \\
& + \tilde{S}^{10} \Big(-\frac{22110733187765891}{55440} + \frac{958919142666538241}{646800}\tilde{X} \\
& - \frac{731635421090458831}{346500}\tilde{X}^2 + \frac{29380756530614514013}{19404000}\tilde{X}^3 \\
& - \frac{3656164073405268}{6125}\tilde{X}^4 + \frac{11306553865010744}{86625}\tilde{X}^5 \\
& - \frac{1790601425683472}{121275}\tilde{X}^6 + \frac{332724599656408}{496125}\tilde{X}^7 \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{15433223895270893}{259875} + \frac{15968418267121470617}{116424000} \tilde{X} \right. \\
& \quad \left. - \frac{7828094703412696}{67375} \tilde{X}^2 + \frac{11831615672987962}{259875} \tilde{X}^3 \right. \\
& \quad \left. - \frac{91654360816864}{11025} \tilde{X}^4 + \frac{3107297514987236}{5457375} \tilde{X}^5 \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{166135545371231}{67375} + \frac{801171357458921}{259875} \tilde{X} - \frac{145297480288496}{121275} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{794693945069744}{5457375} \tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{16} \left(-\frac{2409429366728}{121275} + \frac{41745586147262}{5457375} \tilde{X} \right) \tag{A.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_8 = & 675 - \frac{387045}{4} \tilde{X} - \frac{29211251373}{50} \tilde{X}^2 + \frac{852417952857}{25} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{1772124191636301}{4900} \tilde{X}^4 + \frac{53149849031963007}{39200} \tilde{X}^5 - \frac{1401315611345291}{588} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{26948037029579767}{11760} \tilde{X}^7 - \frac{285771169184667599}{215600} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{3810572956513200337}{7761600} \tilde{X}^9 - \frac{240515303839073}{1980} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{13358379764254099}{646800} \tilde{X}^{11} - \frac{638244896394439}{259875} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{5995664444857159}{29106000} \tilde{X}^{13} - \frac{820428095376}{67375} \tilde{X}^{14} + \frac{304077691466}{606375} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{1698615488}{121275} \tilde{X}^{16} + \frac{915950053}{3638250} \tilde{X}^{17} - \frac{259541}{99225} \tilde{X}^{18} + \frac{259541}{21829500} \tilde{X}^{19} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{29211251373}{100} + \frac{1704835905714}{25} \tilde{X} - \frac{19493366107999311}{9800} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad + \frac{690948037415519091}{39200} \tilde{X}^3 - \frac{26624996615560529}{392} \tilde{X}^4 + \frac{26948037029579767}{196} \tilde{X}^5 \\
& \quad - \frac{70585478788612896953}{431200} \tilde{X}^6 + \frac{956453812084813284587}{7761600} \tilde{X}^7 \\
& \quad - \frac{243642002788980949}{3960} \tilde{X}^8 + \frac{6799415300005336391}{323400} \tilde{X}^9 \\
& \quad - \frac{868651303992831479}{173250} \tilde{X}^{10} + \frac{8172090638340307717}{9702000} \tilde{X}^{11} \\
& \quad - \frac{6714793746604872}{67375} \tilde{X}^{12} + \frac{4979576275447216}{606375} \tilde{X}^{13} - \frac{55645794079136}{121275} \tilde{X}^{14} \\
& \quad \left. + \frac{779473495103}{47250} \tilde{X}^{15} - \frac{302365265}{882} \tilde{X}^{16} + \frac{3779695583}{1212750} \tilde{X}^{17} \right) \\
& + \tilde{S}^4 \left(-\frac{1772124191636301}{4900} + \frac{903547433543371119}{78400} \tilde{X} - \frac{21019734170179365}{196} \tilde{X}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{107792148118319068}{245} \tilde{X}^3 - \frac{9430448583094030767}{9800} \tilde{X}^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6474163453115927372563}{5174400} \tilde{X}^5 - \frac{512538112481064563}{495} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{184332282366942312101}{323400} \tilde{X}^7 - \frac{148711060859904287}{693} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{19791688332473481859}{352800} \tilde{X}^9 - \frac{62612610954810192}{6125} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{260246716707324896}{202125} \tilde{X}^{11} - \frac{13264739740884224}{121275} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{43336822067566613}{7276500} \tilde{X}^{13} - \frac{6182416634698}{33075} \tilde{X}^{14} + \frac{94131108503}{36750} \tilde{X}^{15} \Big) \\
& + \tilde{S}^6 \left(-\frac{23822365392869947}{2352} + \frac{835389147916972777}{5880} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{19146668335372729133}{26950} \tilde{X}^2 + \frac{3425705087905367102963}{1940400} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{19967821040023679533}{7920} \tilde{X}^4 + \frac{1450626533739645372707}{646800} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{67777140282814660727}{51975} \tilde{X}^6 + \frac{185367957641648784803}{363825} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{1824457538038932756}{13475} \tilde{X}^8 + \frac{2960085642141816376}{121275} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{354695278834959872}{121275} \tilde{X}^{10} + \frac{36725944316488636}{165375} \tilde{X}^{11} \\
& \left. - \frac{60678510586879}{6300} \tilde{X}^{12} + \frac{37643589679067}{207900} \tilde{X}^{13} \right) \\
& + \tilde{S}^8 \left(-\frac{8858906244724695569}{215600} + \frac{2633105912950621432867}{7761600} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{2128319923671956977}{1980} \tilde{X}^2 + \frac{2291109071746984773589}{1293600} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{2708711340297999116}{1575} \tilde{X}^4 + \frac{2036205589111274339467}{1940400} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{5599870525109370672}{13475} \tilde{X}^6 + \frac{13082299246929507944}{121275} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{439806001162527616}{24255} \tilde{X}^8 + \frac{688526869778667481}{363825} \tilde{X}^9 \\
& \left. - \frac{174827688100514}{1575} \tilde{X}^{10} + \frac{1930312412765777}{693000} \tilde{X}^{11} \right) \\
& + \tilde{S}^{10} \left(-\frac{166196074952799443}{3960} + \frac{72950111892591634639}{323400} \tilde{X} \right. \\
& - \frac{165233306492867129393}{346500} \tilde{X}^2 + \frac{10254630722281438181219}{19404000} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{2097950730451927704}{6125} \tilde{X}^4 + \frac{27484015923345307168}{202125} \tilde{X}^5 \\
& \left. - \frac{4042412247744344192}{121275} \tilde{X}^6 + \frac{810090043406478106}{165375} \tilde{X}^7 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{265846057283887}{675}\tilde{X}^8 + \frac{382998603539749}{28875}\tilde{X}^9) \\
& + \tilde{S}^{12} \left(-\frac{3485455379210031379}{259875} + \frac{5573383802341424434471}{116424000}\tilde{X} \right. \\
& -\frac{4491854487748839888}{67375}\tilde{X}^2 + \frac{28760338246086271064}{606375}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{206916349674997504}{11025}\tilde{X}^4 + \frac{7565388256210266527}{1819125}\tilde{X}^5 \\
& \left. -\frac{454160444366756}{945}\tilde{X}^6 + \frac{833546612742332}{37125}\tilde{X}^7 \right) \\
& + \tilde{S}^{14} \left(-\frac{95330565523821618}{67375} + \frac{1947490509364697212}{606375}\tilde{X} \right. \\
& -\frac{328019572340291456}{121275}\tilde{X}^2 + \frac{1934854390451486708}{1819125}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{721874509066993}{3675}\tilde{X}^4 + \frac{8305150942611073}{606375}\tilde{X}^5) \\
& + \tilde{S}^{16} \left(-\frac{5439461089683008}{121275} + \frac{203277327429270793}{3638250}\tilde{X} - \frac{721055087779039}{33075}\tilde{X}^2 \right. \\
& \left. + \frac{28864054745507}{10780}\tilde{X}^3 \right) \\
& + \tilde{S}^{18} \left(-\frac{57600084923321}{198450} + \frac{1225582843976861}{10914750}\tilde{X} \right) \tag{A.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_9 = & -\frac{5716575}{2048} - \frac{712307115}{16384}\tilde{X} - \frac{53478412581339}{40960}\tilde{X}^2 + \frac{31100390895173733}{163840}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{502781754480920721}{143360}\tilde{X}^4 + \frac{3325681861227511821}{163840}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{11627885912123209}{224}\tilde{X}^6 + \frac{12594490460272652453}{179200}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{7915277597603095461}{140800}\tilde{X}^8 + \frac{337682546305005247727}{11827200}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{92978013607990233689}{9609600}\tilde{X}^{10} + \frac{40634464745833234669}{17937920}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{6763724664910402927}{18018000}\tilde{X}^{12} + \frac{90278540532324113647}{2018016000}\tilde{X}^{13} \\
& -\frac{3387831607554819}{875875}\tilde{X}^{14} + \frac{625697507310091}{2574000}\tilde{X}^{15} - \frac{3481283602417}{315315}\tilde{X}^{16} \\
& + \frac{11251974691379}{31531500}\tilde{X}^{17} - \frac{1468025159}{184275}\tilde{X}^{18} + \frac{4713758111}{40540500}\tilde{X}^{19} \\
& -\frac{43636}{43875}\tilde{X}^{20} + \frac{10909}{2895750}\tilde{X}^{21} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{53478412581339}{81920} + \frac{31100390895173733}{81920}\tilde{X} - \frac{5530599299290127931}{286720}\tilde{X}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{43233864195957653673}{163840} \tilde{X}^3 - \frac{662789496991022913}{448} \tilde{X}^4 \\
& + \frac{37783471380817957359}{8960} \tilde{X}^5 - \frac{1955073566607964578867}{281600} \tilde{X}^6 \\
& + \frac{84758319122556317179477}{11827200} \tilde{X}^7 - \frac{94186727784894106726957}{19219200} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{20682942555629116446521}{8968960} \tilde{X}^9 - \frac{9205429268943058383647}{12012000} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{123049650745557766900861}{672672000} \tilde{X}^{11} - \frac{55455415584064832211}{1751750} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{1280802797463756277}{321750} \tilde{X}^{13} - \frac{228090220346759423}{630630} \tilde{X}^{14} \\
& + \frac{9575430462363529}{409500} \tilde{X}^{15} - \frac{1710249310235}{1638} \tilde{X}^{16} \\
& + \frac{68646459370493}{2252250} \tilde{X}^{17} - \frac{4575474598}{8775} \tilde{X}^{18} + \frac{2287759117}{579150} \tilde{X}^{19} \Big) \\
& + \tilde{S}^4 \Big(-\frac{502781754480920721}{143360} + \frac{56536591640867700957}{327680} \tilde{X} \\
& - \frac{523254866045544405}{224} \tilde{X}^2 + \frac{37783471380817957359}{2800} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{261204160720902150213}{6400} \tilde{X}^4 + \frac{573722646172203915888173}{7884800} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{198136146998627187991259}{2402400} \tilde{X}^6 + \frac{560714979027752805197531}{8968960} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{1575947846924123881991}{48048} \tilde{X}^8 + \frac{298009462297201899148747}{24460800} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{258549144793761121623}{79625} \tilde{X}^{10} + \frac{33469185363524077681}{53625} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{27185858881247510716}{315315} \tilde{X}^{12} + \frac{532370540852028835459}{63063000} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{34969207805921902}{61425} \tilde{X}^{14} + \frac{1709599932971813}{68250} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{48374738692}{75} \tilde{X}^{16} + \frac{945595141793}{128700} \tilde{X}^{17} \Big) \\
& + \tilde{S}^6 \Big(-\frac{197674060506094553}{896} + \frac{390429204268452226043}{89600} \tilde{X} \\
& - \frac{530323599039407395887}{17600} \tilde{X}^2 + \frac{303576609128199717706573}{2956800} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{7719127667748957191094469}{38438400} \tilde{X}^4 + \frac{4412618430144268452410717}{17937920} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{718260213340830418026911}{3603600} \tilde{X}^6 + \frac{2791141637637864621624299}{25225200} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{30135266936109640673031}{700700} \tilde{X}^8 + \frac{1522734369942768752969}{128700} \tilde{X}^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{726941951716662669448}{315315}\tilde{X}^{10} + \frac{225579656124614340274}{716625}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{343211978655342421}{11700}\tilde{X}^{12} + \frac{683679172758284657}{386100}\tilde{X}^{13} \\
& -\frac{181910249319532}{2925}\tilde{X}^{14} + \frac{92841739468754}{96525}\tilde{X}^{15} \Big) \\
+ & \tilde{S}^8 \Big(-\frac{245373605525695959291}{140800} + \frac{233338639496758626179357}{11827200}\tilde{X} \\
& -\frac{822762442417105577913961}{9609600}\tilde{X}^2 + \frac{6969257683022603911314859}{35875840}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{7176311869469937505547}{27300}\tilde{X}^4 + \frac{30659765985804189207998611}{134534400}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{23123803865450972160993}{175175}\tilde{X}^6 + \frac{6729827819022799280611}{128700}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{901374932059785521594}{63063}\tilde{X}^8 + \frac{8458198007314238292383}{3153150}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{988866670858783286}{2925}\tilde{X}^{10} + \frac{35058144156178258067}{1287000}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{3695623019335772}{2925}\tilde{X}^{12} + \frac{2468935855239448}{96525}\tilde{X}^{13} \Big) \\
+ & \tilde{S}^{10} \Big(-\frac{64247807403121251479099}{19219200} + \frac{221904811976995294527409}{8968960}\tilde{X} \\
& -\frac{1751040387324659482562249}{24024000}\tilde{X}^2 + \frac{154407089292595756859123627}{1345344000}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{17326329597380282379777}{159250}\tilde{X}^4 + \frac{3534598380762591493823}{53625}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{8284855266951406033078}{315315}\tilde{X}^6 + \frac{4975769495450756418379}{716625}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{10525816358863953091}{8775}\tilde{X}^8 + \frac{6955982961987374479}{53625}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{38701255504228037}{4875}\tilde{X}^{10} + \frac{134581881609362971}{643500}\tilde{X}^{11} \Big) \\
+ & \tilde{S}^{12} \Big(-\frac{36936700395075710384347}{18018000} + \frac{83920132644091993998728143}{8072064000}\tilde{X} \\
& -\frac{18548422093173532237647}{875875}\tilde{X}^2 + \frac{14794962319673629555141}{643500}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{424071545493614949236}{28665}\tilde{X}^4 + \frac{92936898590183087947561}{15765750}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{2568838675018658444}{1755}\tilde{X}^6 + \frac{105971541093604493804}{482625}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{53059260588421304}{2925}\tilde{X}^8 + \frac{487518590631633239}{772200}\tilde{X}^9 \Big) \\
+ & \tilde{S}^{14} \Big(-\frac{3149223239603125543011}{7007000} + \frac{2003665496381538618481}{1287000}\tilde{X}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{672270544173969978154}{315315}\tilde{X}^2 + \frac{11884344873149797348022}{7882875}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{4083092617163066107}{6825}\tilde{X}^4 + \frac{150837334443545493283}{1126125}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{46036944777647392}{2925}\tilde{X}^6 + \frac{72566575071858044}{96525}\tilde{X}^7) \\
& + \tilde{S}^{16} \left(-\frac{11148083148467537347}{315315} + \frac{2497157280655037161199}{31531500}\tilde{X} \right. \\
& -\frac{313727521303017097}{4725}\tilde{X}^2 + \frac{524226122936189897}{20020}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{4758051520483876}{975}\tilde{X}^4 + \frac{22214852115500569}{64350}\tilde{X}^5) \\
& + \tilde{S}^{18} \left(-\frac{325799676459487379}{368550} + \frac{22258915051950851831}{20270250}\tilde{X} \right. \\
& -\frac{3772319621333914}{8775}\tilde{X}^2 + \frac{30842030895512227}{579150}\tilde{X}^3) \\
& + \tilde{S}^{20} \left(-\frac{206054276510356}{43875} + \frac{10564097574141743}{5791500}\tilde{X} \right) \tag{A.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{10} = & \frac{91125}{8} + \frac{21438675}{128}\tilde{X} - \frac{607296231621}{320}\tilde{X}^2 + \frac{1115737995860937}{1280}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{65356894821275343}{2240}\tilde{X}^4 + \frac{4712475624988559301}{17920}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{27311138259540955}{28}\tilde{X}^6 + \frac{18410040997415653}{10}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{2470816192013890991}{1232}\tilde{X}^8 + \frac{101184393090441496963}{73920}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{1144746381575325625}{1848}\tilde{X}^{10} + \frac{10013612053934469175}{51744}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{425435768722970419}{9900}\tilde{X}^{12} + \frac{10751805350563854881}{1552320}\tilde{X}^{13} \\
& -\frac{99688344381420658}{121275}\tilde{X}^{14} + \frac{23433617409470623}{323400}\tilde{X}^{15} \\
& -\frac{577302804852667}{121275}\tilde{X}^{16} + \frac{5075875341420931}{21829500}\tilde{X}^{17} - \frac{830418475216}{99225}\tilde{X}^{18} \\
& + \frac{108140875343}{496125}\tilde{X}^{19} - \frac{5921877194}{1488375}\tilde{X}^{20} + \frac{3149587499}{65488500}\tilde{X}^{21} \\
& -\frac{5641586}{16372125}\tilde{X}^{22} + \frac{2820793}{2554051500}\tilde{X}^{23} \\
& + \tilde{S}^2 \left(-\frac{607296231621}{640} + \frac{1115737995860937}{640}\tilde{X} - \frac{718925843034028773}{4480}\tilde{X}^2 \right. \\
& + \frac{61262183124851270913}{17920}\tilde{X}^3 - \frac{1556734880793834435}{56}\tilde{X}^4 \\
& + 110460245984493918\tilde{X}^5 - \frac{610291599427431074777}{2464}\tilde{X}^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{25397282665700815737713}{73920} \tilde{X}^7 - \frac{1159628084535804858125}{3696} \tilde{X}^8 \\
& + \frac{5096928535452644810075}{25872} \tilde{X}^9 - \frac{579018081231962740259}{6600} \tilde{X}^{10} \\
& + \frac{14654710692818534202803}{517440} \tilde{X}^{11} - \frac{815899254589737375401}{121275} \tilde{X}^{12} \\
& + \frac{47968614837186365281}{40425} \tilde{X}^{13} - \frac{37824302471141889173}{242550} \tilde{X}^{14} \\
& + \frac{4319569915549212281}{283500} \tilde{X}^{15} - \frac{483718761813320}{441} \tilde{X}^{16} \\
& + \frac{3149711135240218}{55125} \tilde{X}^{17} - \frac{620941394115467}{297675} \tilde{X}^{18} \\
& + \frac{94358491882541}{1871100} \tilde{X}^{19} - \frac{1690171212119}{2338875} \tilde{X}^{20} \\
& + \frac{2957807378389}{638512875} \tilde{X}^{21} \Big) \\
& + \tilde{S}^4 \Big(-\frac{65356894821275343}{2240} + \frac{80112085624805508117}{35840} \tilde{X} \\
& - \frac{1229001221679342975}{28} \tilde{X}^2 + \frac{1767363935751902688}{5} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{81536934336458402703}{56} \tilde{X}^4 + \frac{171912283860660103340137}{49280} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{2439454539137018906875}{462} \tilde{X}^6 + \frac{138177832732241740145825}{25872} \tilde{X}^7 \\
& - \frac{495632670562260538135}{132} \tilde{X}^8 + \frac{35491709462211284962181}{18816} \tilde{X}^9 \\
& - \frac{2535971792718960118862}{3675} \tilde{X}^{10} + \frac{2506975257699986189786}{13475} \tilde{X}^{11} \\
& - \frac{4508243043909594797716}{121275} \tilde{X}^{12} + \frac{240157534559701388708051}{43659000} \tilde{X}^{13} \\
& - \frac{19781048061523794848}{33075} \tilde{X}^{14} + \frac{862858856024555918}{18375} \tilde{X}^{15} \\
& - \frac{12192096970182662}{4725} \tilde{X}^{16} + \frac{273007116849057223}{2910600} \tilde{X}^{17} \\
& - \frac{6612931784476618}{3274425} \tilde{X}^{18} + \frac{496561443759988}{25540515} \tilde{X}^{19} \Big) \\
& + \tilde{S}^6 \Big(-\frac{464289350412196235}{112} + \frac{570711270919885243}{5} \tilde{X} \\
& - \frac{165544684864930696397}{154} \tilde{X}^2 + \frac{90964769388306905769737}{18480} \tilde{X}^3 \\
& - \frac{95037989344765108713125}{7392} \tilde{X}^4 + \frac{1087408173772905811120775}{51744} \tilde{X}^5 \\
& - \frac{45178300587998397704867}{1980} \tilde{X}^6 + \frac{332413566023382701355877}{19404} \tilde{X}^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{443371338418024792294021}{48510}\tilde{X}^8 + \frac{57029433911114866899557}{16170}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{120549106484669676255448}{121275}\tilde{X}^{10} + \frac{101761179300058873213586}{496125}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{48536219942065003676}{1575}\tilde{X}^{12} + \frac{15684653827129531841}{4725}\tilde{X}^{13} \\
& -\frac{24687188486575088678}{99225}\tilde{X}^{14} + \frac{13402382528930355647}{1091475}\tilde{X}^{15} \\
& -\frac{111525585134660881}{311850}\tilde{X}^{16} + \frac{395299246809670547}{85135050}\tilde{X}^{17} \Big) \\
+ & \tilde{S}^8 \Big(-\frac{76595301952430620721}{1232}\tilde{X} + \frac{69918415625495074401433}{73920}\tilde{X} \\
& -\frac{10129860730560056455625}{1848}\tilde{X}^2 + \frac{1717444616982354742673425}{103488}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{451387350615071614559}{15}\tilde{X}^4 + \frac{3651452870521042447701053}{103488}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{680427479927572627949926}{24255}\tilde{X}^6 + \frac{252045450877008778684183}{16170}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{149475405031843508092094}{24255}\tilde{X}^8 + \frac{3815575476816178205373487}{2182950}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{559372670129063474464}{1575}\tilde{X}^{10} + \frac{804287854334958455171}{15750}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{10235428936146118462}{2025}\tilde{X}^{12} + \frac{50915557963248163852}{155925}\tilde{X}^{13} \\
& -\frac{2697658069891053532}{218295}\tilde{X}^{14} + \frac{8820521016380855371}{42567525}\tilde{X}^{15} \Big) \\
+ & \tilde{S}^{10} \Big(-\frac{791019749668550006875}{3696}\tilde{X} + \frac{54684335426536136164675}{25872}\tilde{X} \\
& -\frac{110139789857383642863653}{13200}\tilde{X}^2 + \frac{18389253515088734121024421}{1034880}\tilde{X}^3 \\
& -\frac{84972400828007531176369}{3675}\tilde{X}^4 + \frac{264755493455644502540038}{13475}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{1373881225904366710466578}{121275}\tilde{X}^6 + \frac{2244618067431649501723931}{496125}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{850591920089199136112}{675}\tilde{X}^8 + \frac{638323875486879917308}{2625}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{214374652598823086429}{6750}\tilde{X}^{10} + \frac{792974555569633788269}{297000}\tilde{X}^{11} \\
& -\frac{101340488710467827698}{779625}\tilde{X}^{12} + \frac{6495042153943108697}{2338875}\tilde{X}^{13} \Big) \\
+ & \tilde{S}^{12} \Big(-\frac{2323304732996141458159}{9900}\tilde{X} + \frac{9994544947918292017876289}{6209280}\tilde{X} \\
& -\frac{545794981436755061018554}{121275}\tilde{X}^2 + \frac{554100795570125499148273}{80850}\tilde{X}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{70323972600708613626236}{11025}\tilde{X}^4 + \frac{41924739861304629914696729}{10914750}\tilde{X}^5 \\
& -\frac{1453116169370012885056}{945}\tilde{X}^6 + \frac{1389228836155342241744}{3375}\tilde{X}^7 \\
& -\frac{1028673654810167033188}{14175}\tilde{X}^8 + \frac{2872525135739803987921}{356400}\tilde{X}^9 \\
& -\frac{56739639943102900592}{111375}\tilde{X}^{10} + \frac{847071322368712273799}{60810750}\tilde{X}^{11} \Big) \\
& + \tilde{S}^{14} \Big(-\frac{46333597299146409818201}{485100}\tilde{X} + \frac{75041262127791090797293}{161700}\tilde{X}^2 \\
& -\frac{111482922707591939968654}{121275}\tilde{X}^3 + \frac{5361143687674816604521558}{5457375}\tilde{X}^4 \\
& -\frac{2309684901871807898768}{3675}\tilde{X}^5 + \frac{13841763617920914109516}{55125}\tilde{X}^6 \\
& -\frac{6247711370432383620368}{99225}\tilde{X}^7 + \frac{10475514606818641584242}{1091475}\tilde{X}^8 \\
& -\frac{3536318451369159685891}{4365900}\tilde{X}^9 + \frac{985287925995036150079}{34054020}\tilde{X}^{10} \Big) \\
& + \tilde{S}^{16} \Big(-\frac{1848691576254451860097}{121275}\tilde{X} + \frac{1126491963605120582390911}{21829500}\tilde{X}^2 \\
& -\frac{2307063109644366794864}{33075}\tilde{X}^3 + \frac{12026555134361815961}{245}\tilde{X}^4 \\
& -\frac{645719057361593389154}{33075}\tilde{X}^5 + \frac{916250285021729060537}{207900}\tilde{X}^6 \\
& -\frac{81840197248656023962}{155925}\tilde{X}^7 + \frac{8692250878034489195497}{340540200}\tilde{X}^8 \Big) \\
& + \tilde{S}^{18} \Big(-\frac{92147627338910490248}{99225}\tilde{X} + \frac{1021307628105163683406}{496125}\tilde{X}^2 \\
& -\frac{73134939480036212483}{42525}\tilde{X}^3 + \frac{8904544408495470286997}{13097700}\tilde{X}^4 \\
& -\frac{83597711386408585033}{654885}\tilde{X}^5 + \frac{1166977249498219845157}{127702575}\tilde{X}^6 \Big) \\
& + \tilde{S}^{20} \Big(-\frac{27963794133120522074}{1488375}\tilde{X} + \frac{3050009135368325181673}{130977000}\tilde{X}^2 \\
& -\frac{21381758576937593158}{2338875}\tilde{X}^3 + \frac{728285122468077990602}{638512875}\tilde{X}^4 \Big) \\
& + \tilde{S}^{22} \Big(-\frac{2731609908191035811}{32744250}\tilde{X} + \frac{41515492371927341743}{1277025750}\tilde{X}^2 \Big)
\end{aligned} \tag{A.49}$$

付 録 B 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

ここでは、相対論的な運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の詳細な計算を紹介する。まずは、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果の基本式である、(3.16) 式を導出する。銀河団座標系で考えた、散乱前後での電子の分布関数及びエネルギーは、

$$f(E) = f_C(E_C) \quad (\text{B.1})$$

$$f(E') = f_C(E'_C) \quad (\text{B.2})$$

$$E_C = \gamma(E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}) \quad (\text{B.3})$$

$$E'_C = \gamma(E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}') \quad (\text{B.4})$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{B.5})$$

が成り立つ事を考えると、

$$f_C(E_C) = e^{-(E_C - m)/k_B T_e} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} f_C(E'_C) &= e^{-(E'_C - m)/k_B T_e} e^{(\mu_C - m)/k_B T_e} \\ &= f_C(E_C) e^{(E_C - E'_C)/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

である。ここで、散乱前後でのエネルギーと運動量の保存を考えると

$$\begin{aligned} E + \omega &= E' + \omega' \\ \mathbf{p} + \mathbf{k} &= \mathbf{p}' + \mathbf{k}' \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

となる。この関係を考慮し、 $E_C - E'_C$ の項に注目すると、

$$\begin{aligned} E_C - E'_C &= \gamma(E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p} - E' + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}') \\ &= \gamma[E - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p} - (E + \omega - \omega') + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}')] \\ &= \gamma[\omega' - \omega + \boldsymbol{\beta} \cdot ((\omega - \omega') \hat{\mathbf{k}}' + \omega(\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'))] \\ &= \gamma k_B T_e [\Delta x (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}') + x \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

となる。これを用いると、(B.7) 式は、

$$f_C(E'_C) = f_C(E_C) e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \quad (\text{B.10})$$

と変形できる。よって、運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果を記述するボルツマン方程式は、

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) \{n(\omega)[1+n(\omega')] - n(\omega')[1+n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')} e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \} \quad (\text{B.11})$$

となる。ここで、Fokker-Plank 展開を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} = & 2 \left[\frac{\partial n}{\partial x} I_{1,0} + n(1+n) I_{1,1} \right] + 2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{2,0} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{2,1} + n(1+n) I_{2,2} \right] \\ & + 2 \left[\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} I_{3,0} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{3,1} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{3,2} + n(1+n) I_{3,3} \right] + \dots \\ & + 2n \left[(1+n) J_0 + \frac{\partial n}{\partial x} J_1 + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} J_2 + \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} J_3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$I_{k,l} \equiv \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) (\Delta x)^k e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \gamma^l (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^l \quad (\text{B.13})$$

$$J_k \equiv -\frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_c(E_c) (\Delta x)^k (1 - e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')}) \quad (\text{B.14})$$

という結果が得られる。

B.1 β 1 次の項

まずは、 β の 1 次の項から考えていく。(B.13), (B.14) 式中の項の中で β に関係する項は、 $f_C(E_C)$, $e^{x \gamma \vec{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')}$, γ^l , $(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^l$ である。それぞれの項から、 β の 1 次以下を取り出してくる。まずは、 γ^l であるが、

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad (\text{B.15})$$

であるので、ここでは γ^l の項は、気にする必要はない。次に、 $f_C(E_C)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f_c(E_C) &= e^{-[(E_c - m) - (\mu_c - m)]/k_B T_e} \\ &= e^{-\left(E/\sqrt{1-\beta^2} - m\right)/k_B T_e} e^{\vec{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e / \sqrt{1-\beta^2}} e^{(\mu_c - m)/k_B T_e} \\ &\approx e^{-(E - m)/k_B T_e} e^{\vec{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e} e^{(\mu - m)/k_B T_e} \\ &\approx \left(1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e}\right) f(E) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

となる。次に、 $e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}, (1-\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}')^l$ の項を計算すると、

$$e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')} \approx 1 + x\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}') \quad (\text{B.17})$$

$$(1-\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}')^l \approx 1 - l\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}' \quad (\text{B.18})$$

となる。(B.15)～(B.18) 式をまとめると、

$$\begin{aligned} f_c(E_c)e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}\gamma^l(1-\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}')^l &= f(E)\left(1+\frac{\beta\cdot\mathbf{p}}{k_BT_e}\right)(1+x\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}'))(1-l\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}') \\ &\approx f(E)\left(1+\frac{\beta\cdot\mathbf{p}}{k_BT_e}+x\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')-l\beta\cdot\hat{\mathbf{k}}'\right) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

となり、 J_k に関しては、

$$\begin{aligned} f_c(E_c)\left(1-e^{x\gamma\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')}\right) &= f(E)\left(1+\frac{\beta\cdot\mathbf{p}}{k_BT_e}\right)\left(1-1-x\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}')\right) \\ &\approx f(E)x\beta\cdot(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{k}}') \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

となる。よってこれらを用いて、熱的效果と同様に計算すれば求まる訳だが、熱的效果の計算と違う点を挙げておく。まずは、(A.14) 式であるが、運動学的効果を計算する場合、銀河団の速度を z-x 平面に置いた方が計算が楽になるため、 p に関する角度の積分が増え、

$$\int d^3p \int d\Omega_{k'} = \int dp p^2 \int_0^\pi d\alpha \sin\alpha \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (\text{B.21})$$

となる。また、加法定理の (A.27) 式も変わり、

$$\cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\cos(\phi_p - \phi) \quad (\text{B.22})$$

となる。さて、これで計算する準備が整った訳だが、実際に計算してみると非常に計算に時間が掛かる事がわかる。Mathematica のプログラムを上手く組まないとメモリの関係上、スワッピングを起こす為、計算が終了しない事がある。ここで、計算を少なくする為に、(B.12) 式中の $\partial n/\partial x$ と x の次数に関して考える。 n を 1 回微分すると、

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{T_e}{T_0} \quad (\text{B.23})$$

との積になる。また、

$$x = \frac{T_0}{T_e} X \quad (\text{B.24})$$

である為、微分回数より x の次数が高い項では T_0/T_e が効いてくるので、 $T_0/T_e \ll 1$ より、最終的には 0 とする項である事が分かる。 β の 1 次までを考慮した場合、 J_k の x に関する最低次数は、 $k+1$ であり、これを (B.12) 式に代入すると、全ての項で T_0/T_e が残る為、0 とする事が出来る。また、 $I_{k,l}$ に関しては、同様に考えると、

$$I_{k,l} = \frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) (\Delta)^k \left(1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} \right) \quad (\text{B.25})$$

のみを計算すれば良い。さらに、(B.25) 式中には、 l が入っていない為、 $I_{k,0}$ だけ計算すれば求める事ができる。

B.2 β^2 次の項

さて、ここからは、 β^2 の項を計算していく。まず $f_C(E_C)$ は、

$$\begin{aligned} f_c(E_c) &= e^{-[(E_c - m) - (\mu_c - m)]/k_B T_e} \\ &= e^{-\left(E/\sqrt{1-\beta^2} - m\right)/k_B T_e} e^{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e / \sqrt{1-\beta^2}} e^{(\mu_c - m)/k_B T_e} \\ &= e^{-\gamma(E - m)/k_B T_e} e^{m(\gamma - 1)/k_B T_e} e^{\gamma \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e} e^{(\mu_c - m)/k_B T_e} \\ &\approx e^{-(1 + \frac{1}{2}\beta^2)(E - m)/k_B T_e} e^{\frac{1}{2}\beta^2 m/k_B T_e} e^{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e} e^{(\mu_c - m)/k_B T_e} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

となり、 $f(E)$ の形に分離できない事がわかる。ここで、

$$a \equiv 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad (\text{B.27})$$

とおき、

$$f_c(E_c) = f_\beta(E) e^{\frac{1}{2}\beta^2 m/k_B T_e} e^{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}/k_B T_e} \quad (\text{B.28})$$

$$f_\beta(E) = e^{-a(E - m)/k_B T_e} e^{(\mu_c - m)/k_B T_e} \quad (\text{B.29})$$

と表記しておく。ここで、 J_k に含まれる β を含む項を計算すると、

$$\begin{aligned} f_C(E_C) \left(1 - e^{x\gamma \boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \right) &= f_\beta(E) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e} \right) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} \right)^2 \right) \\ &\quad \times \left(1 - 1 - x\boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') - \frac{1}{2} (x\boldsymbol{\beta} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'))^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

となる。ここで β^2 の項を取り出すと、

$$f_\beta(E) \left[-\frac{x\beta^2}{k_B T_e} \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') - \frac{1}{2} (x\beta \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'))^2 \right] \quad (\text{B.31})$$

となるが、これらの項も x が項の中に含まれるため、 $T_0/T_e \rightarrow 0$ の極限を取った時に、0 になってしまうので特に無理に計算する必要はない。次に、 $I_{k,l}$ に含まれる β に関する項を計算すると、

$$\begin{aligned} f_C(E_C) e^{x\gamma\beta \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}')} \gamma^l (1 - \beta \cdot \hat{\mathbf{k}}')^l &\approx f_\beta(E) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e} \right) \left(1 + \frac{\beta \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} \right)^2 \right) \\ &\times \left(1 + x\beta \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') + \frac{1}{2} (x\beta \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'))^2 \right) \\ &\times \left(1 + \frac{l}{2} \beta^2 \right) \left(1 - l\beta \cdot \hat{\mathbf{k}}' + \frac{l(l-1)}{2} (\beta \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

この中で β^2 の項を取り出すと、

$$\begin{aligned} f_\beta(E) &\left[\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \cdot \mathbf{p}}{k_B T_e} \right)^2 + \frac{1}{2} (x\beta \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}'))^2 + \frac{l}{2} \beta^2 + \frac{l(l-1)}{2} (\beta \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 \right. \\ &\left. + \frac{x\beta^2}{k_B T_e} \mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') - \frac{\beta^2}{k_B T_e} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}' - lx\beta^2 \hat{\mathbf{k}}' \cdot (\hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}') \right] \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

となるが、この中の x を含む項と、 l を含む項は T_0/T_e が残る為 $T_0/T_e \rightarrow 0$ の極限で 0 になる項である。よってこれらの項を落とすと、

$$\begin{aligned} f_\beta(E) &\left[\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 p^2}{(k_B T_e)^2} - \frac{\beta^2}{k_B T_e} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \right] \\ &= f_\beta(E) \left[\frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\theta_e^2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\theta_e} \frac{p}{m} \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \right] \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

となる。この中の p/m は、(A.21) 式を組み合わせれば、 t または、 u で表す事が可能である。最後に $f_\beta(E)$ が問題であるがこれは、

$$\begin{aligned} \int du e^{-au} u^{1/2} &= \frac{1}{a^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{3}{4}\beta^2\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ \int du e^{-au} u^{3/2} &= \frac{1}{a^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{a^{5/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{5}{4}\beta^2\right) \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ \int du e^{-au} u^{5/2} &= \frac{1}{a^{7/2}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{4} \frac{1}{a^{7/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{7}{4}\beta^2\right) \frac{15}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ \int du e^{-au} u^{7/2} &= \frac{1}{a^{9/2}} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105}{8} \frac{1}{a^{9/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{9}{4}\beta^2\right) \frac{105}{8} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int du e^{-au} u^{9/2} &= \frac{1}{a^{11/2}} \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945}{16} \frac{1}{a^{11/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{11}{4}\beta^2\right) \frac{945}{16} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-au} u^{11/2} &= \frac{1}{a^{13/2}} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{10395}{32} \frac{1}{a^{13/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \approx \left(1 - \frac{13}{4}\beta^2\right) \frac{10395}{32} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{B.35}$$

の関係を用いて積分を行えば、容易に計算する事が出来る。また、各々のベクトルの成分表記を示しておく。

$$\mathbf{k} = \omega(0, 0, 1) \tag{B.36}$$

$$\mathbf{p} = p(\sin \alpha \cos \phi_p, \sin \alpha \sin \phi_p, \cos \alpha) \tag{B.37}$$

$$\mathbf{k}' = \omega'(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \tag{B.38}$$

$$\mathbf{p}' = p'(\sin \alpha' \cos \phi'_p, \sin \alpha' \sin \phi'_p, \cos \alpha') \tag{B.39}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta} &= (\beta_x, 0, \beta_z) \\
&= \beta(\sin \theta_\gamma, 0, \cos \theta_\gamma)
\end{aligned}
\tag{B.40}$$

角ベクトルのなす角は、混乱を防ぐ為に熱的效果を求めた時と同じ記号のままにしてある。

付 録 C 式の導出

C.1 ボルツマン方程式の展開

C.1.1 熱的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

ここでは、 $\theta_e \ll 1$ として、ボルツマン方程式の展開計算について記述する。ボルツマン方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] f(E) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f(E') \} \\ &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

と書けるのでこれを $\Delta x \equiv (\omega' - \omega) / k_B T_e \ll 1$ として、次のような流れで、Fokker-Planck 展開をする。

$$\begin{aligned} n(\omega') &= n(\omega + \Delta\omega) \\ &\simeq n + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \\ &= n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$n \equiv n(\omega) \quad (\text{C.3})$$

$$e^{\Delta x} \simeq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \quad (\text{C.4})$$

となることを用いて、

$$n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq n \left[1 + n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] - (1+n) \left[n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \right] \\
&= n(1+n) + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k - n(1+n) - (1+n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
&\quad - n(1+n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k - (1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k - (1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} (\Delta x)^l - n(1+n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x)^k \\
&= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j! l!} (1+n) \frac{\partial^j n}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} - \sum_{k=1}^{\infty} n(1+n) \frac{(\Delta x)^k}{k!}
\end{aligned}$$

ここで、 Δx の同次項でまとめるために、 $j+l=k$ とする。 j に $j=k-l$ を代入すれば、 k と l についての和で表せる。そのとき、 $j \geq 1$, $l \geq 1$ に注意すると、 $1 \leq l \leq k-1$ の範囲で和をとることになるから、

$$n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial^k n}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} + n(1+n) \right] \frac{(\Delta x)^k}{k!} \right\} \\
&\hspace{25em} (C.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x} \right\} \\
&\simeq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^k n}{\partial x^k} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} + n(1+n) \right] I_k \\
&= 2 \left[\frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_1 \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_2 \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_3 \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + 4(1+n) \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + 6(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + 4(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} + n(1+n) \right] I_4 \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

(C.6)

このとき、

$$I_k \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f(E) \frac{(\Delta x)^k}{k!} \quad (k \geq 1) \quad (\text{C.7})$$

C.1.2 運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果

ここでは、 $\theta_e \ll 1$ として、ボルツマン方程式の展開計算について記述する。運動学的スニャエフ・ゼルドビッチ効果のボルツマン方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W \{n(\omega) [1 + n(\omega')] f_C(E_C) - n(\omega') [1 + n(\omega)] f_C(E'_C)\} \\ &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \\ &\quad \times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')} e^{x \gamma \beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

とかける。まず、 $\Delta x \equiv (\omega' - \omega) / k_B T_e \ll 1$ として、次のような流れで、Fokker-Planck 展開をする。

$$\begin{aligned} n(\omega') &= n(\omega + \Delta\omega) \\ &\simeq n + \frac{\partial n}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial \omega^2} (\Delta\omega)^2 + \dots \\ &= n + \frac{\partial n}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots \\ &= n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$n \equiv n(\omega) \quad (\text{C.10})$$

$$e^{\Delta x \gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')} \simeq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [\gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')]^k (\Delta x)^k \quad (\text{C.11})$$

となることを用いて、

$$n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')} e^{x \gamma \beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')}$$

$$\simeq n \left[1 + n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right]$$

$$\begin{aligned}
& -(1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \left[n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \right] \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^k (\Delta x)^k \right\} \\
= & n(1+n) + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
& -n(1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} - (1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
& -n(1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^k (\Delta x)^k \\
& -(1+n) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^l (\Delta x)^l \\
= & n(1+n) \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] + n \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
& -e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} (\Delta x)^k \\
& -(1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j n}{\partial x^j} (\Delta x)^j \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^l (\Delta x)^l \\
& -n(1+n)e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^k (\Delta x)^k \\
= & n(1+n) \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] + n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j+l)!}{j! l!} (1+n) \frac{\partial^j n}{\partial x^j} \frac{(\Delta x)^{j+l}}{(j+l)!} e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^l \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} n(1+n) \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} [\gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')]^k
\end{aligned}$$

ここで、第3項から第5項までを Δx の同次項でまとめるために、 $j+l=k$ とする。 j に $j=k-l$ を代入すれば、第3項から第5項は k と l についての和で表せる。そのとき、 $j \geq 1$, $l \geq 1$ に注意すると、 $1 \leq l \leq k-1$ の範囲で和をとることになるから、

$$n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma(1-\beta\cdot\mathbf{k}')} e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')}$$

$$\simeq n \left\{ (1+n) \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \left[1 - e^{x\gamma\beta\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^k n}{\partial x^k} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right. \\
& \quad + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} [\gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')]^l \\
& \quad \left. + n(1+n) \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} [\gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')]^k \right\}
\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n(\omega)}{\partial t} &= -2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \\
&\quad \times \left\{ n(\omega) [1 + n(\omega')] - n(\omega') [1 + n(\omega)] e^{\Delta x \gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')} e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right\} \\
&\simeq 2n \left[(1+n) J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^k n}{\partial x^k} J_k \right] \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^k n}{\partial x^k} I_{k,0} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{k!}{(k-l)! l!} (1+n) \frac{\partial^{k-l} n}{\partial x^{k-l}} I_{k,l} + n(1+n) I_{k,k} \right] \\
&= 2n \left[(1+n) J_0 + \frac{\partial n}{\partial x} J_1 + \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} J_2 + \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} J_3 + \cdots \right] \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial n}{\partial x} I_{1,0} + n(1+n) I_{1,1} \right] + 2 \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{2,0} + 2(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{2,1} + n(1+n) I_{2,2} \right] \\
&\quad + 2 \left[\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} I_{3,0} + 3(1+n) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} I_{3,1} + 3(1+n) \frac{\partial n}{\partial x} I_{3,2} + n(1+n) I_{3,3} \right] + \cdots
\end{aligned} \tag{C.13}$$

このとき、

$$J_k \equiv - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \frac{(\Delta x)^k}{k!} [1 - e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')}] \quad (k \geq 0) \tag{C.14}$$

$$I_{k,l} \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_C(E_C) \frac{(\Delta x)^k}{k!} e^{x\gamma\beta \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} [\gamma (1 - \beta \cdot \mathbf{k}')]^l \quad (k \geq 1, 0 \leq l \leq k) \tag{C.15}$$

C.2 (A.2) 式の導出

ここでは、(A.2) 式の導出を行う。まず、(A.1) 式において $K \equiv (E - m)$ とおく。電子数を N_e とすると、

$$\begin{aligned} N_e &= e^{(\mu-m)/k_B T_e} 2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-K/k_B T_e} \\ &= e^{(\mu-m)/k_B T_e} \frac{1}{\pi^2} \int dp p^2 e^{-K/k_B T_e} \end{aligned} \quad (C.16)$$

となる。ここで、 $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ 、 $K = (E - m)$ より、 p を K を用いて表すと、

$$p = \sqrt{K(K + 2m)} \quad (C.17)$$

となり、(C.16) 式は、

$$N_e = e^{(\mu-m)/k_B T_e} \frac{1}{\pi^2} \int dK (K + m) \sqrt{K(K + 2m)} e^{-K/k_B T_e} \quad (C.18)$$

と変形できる。ここで、 $K/k_B T_e \equiv u$ と置き、変数変換を行うと、

$$N_e = e^{(\mu-m)/k_B T_e} \frac{(k_B T_e)^3}{\pi^2} \int du \left(u + \frac{m}{k_B T_e} \right) \sqrt{u \left(u + \frac{2m}{k_B T_e} \right)} e^{-u} \quad (C.19)$$

となる。次に電子温度を静止エネルギーで割った、無次元の温度 $\theta_e \equiv k_B T_e / mc^2 = k_B T_e / m$ を定義すると、

$$\begin{aligned} N_e &= e^{(\mu-m)/k_B T_e} \frac{m^3}{\pi^2} \int du \left(u + \frac{1}{\theta_e} \right) \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \\ \therefore e^{(\mu-m)/k_B T_e} &= N_e \frac{\pi^2}{m^3} \frac{1}{\theta_e^3} \left[\int du \sqrt{u^3 \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} + \frac{1}{\theta_e} \int du \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (C.20)$$

となり、化学ポテンシャルを消す事が出来る。ここで、 $t \equiv K/m = \theta_e u$ を導入すると、

$$e^{(\mu-m)/k_B T_e} = N_e \frac{\pi^2}{m^3} \left[\int dt (t + 1) \sqrt{t^2 + 2t} e^{-t/\theta_e} \right]^{-1} \quad (C.21)$$

となる。ここで $t \ll 1$ であるので、

$$e^{(\mu-m)/k_B T_e} \simeq N_e \frac{\pi^2}{m^3} \left[\int dt \sqrt{2} \left(t^{1/2} + \frac{5}{4} t^{3/2} + \frac{7}{32} t^{5/2} - \frac{3}{128} t^{7/2} + \frac{11}{2048} t^{9/2} + \frac{13}{8192} t^{11/2} + \dots \right) e^{-t/\theta_e} \right]^{-1} \quad (C.22)$$

となるここで、

$$\begin{aligned}
\int du e^{-u} u^{1/2} &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-u} u^{3/2} &= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-u} u^{5/2} &= \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-u} u^{7/2} &= \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105}{8}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-u} u^{9/2} &= \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{945}{16}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
\int du e^{-u} u^{11/2} &= \Gamma\left(\frac{13}{2}\right) = \frac{10395}{32}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

の積分を利用すると、

$$\begin{aligned}
e^{(\mu-m)/k_B T_e} &= N_e \frac{\pi^2}{m^3} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \\
&\times \left[\sqrt{2} \theta_e^{3/2} \left(1 + \frac{15}{8} \theta_e + \frac{105}{128} \theta_e^2 - \frac{315}{1024} \theta_e^3 + \frac{10395}{32768} \theta_e^4 - \frac{135135}{262144} \theta_e^5 \right) \right]^{-1} \\
\therefore e^{(\mu-m)/k_B T_e} &= N_e \frac{\pi^2}{m\sqrt{2m}} \frac{1}{(k_B T_e)^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \\
&\times \left[1 + \frac{15}{8} \theta_e + \frac{105}{128} \theta_e^2 - \frac{315}{1024} \theta_e^3 + \frac{10395}{32768} \theta_e^4 - \frac{135135}{262144} \theta_e^5 \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

として求める事ができる。最後に今後の表記上 $\tilde{f}(\theta_e)$ を用いて、

$$e^{(\mu-m)/k_B T_e} = N_e \frac{\pi^2}{m\sqrt{2m}} \frac{1}{(k_B T_e)^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(3/2)} \tilde{f}(\theta_e) \tag{C.25}$$

$$\tilde{f}(\theta_e) = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \theta_e^{3/2} \left\{ \int du \sqrt{u^3 \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} + \frac{1}{\theta_e} \int du \sqrt{u \left(u + \frac{2}{\theta_e} \right)} e^{-u} \right\} \right]^{-1} \tag{C.26}$$

$$\simeq \left[1 + \frac{15}{8} \theta_e + \frac{105}{128} \theta_e^2 - \frac{315}{1024} \theta_e^3 + \frac{10395}{32768} \theta_e^4 - \frac{135135}{262144} \theta_e^5 \right]^{-1} \tag{C.27}$$

として、表す。

C.3 (A.8) 式の導出

(A.8) 式を示す為にまず、

$$\int_0^\infty dp_0 \delta(p_\mu p^\mu - m^2) = \frac{1}{2E} \tag{C.28}$$

を示す。自然単位系でのエネルギーと運動量の関係が $E^2 = p^2 + m^2$ である事を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dp_0 \delta(p_\mu p^\mu - m^2) &= \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - p^2 - m^2) \\ &= \int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - E^2)\end{aligned}\tag{C.29}$$

となり、 $0 \leq p_0$ を考慮し、 δ 関数の性質を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dp_0 \delta(p_0^2 - E^2) &= \int_0^\infty \frac{dp_0}{2p_0} \delta(p_0 - E) \\ &= \frac{1}{2E}\end{aligned}\tag{C.30}$$

となり、(C.28) 式が示された。これを用いると、(A.7) 式中の $d^3p'/2E'$ は、

$$\begin{aligned}\frac{d^3p'}{2E'} &= \int_0^\infty dp'_0 \delta(p_0'^2 - p'^2 - m^2) d^3p' \\ &= \int_0^\infty d^4p' \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2)\end{aligned}\tag{C.31}$$

となり、(A.7) 式の積分は、

$$\begin{aligned}\int \frac{d^3p'}{2E'} \delta^4(p + k - p' - k') &= \int_0^\infty d^4p' \delta(p'_\mu p'^\mu - m^2) \delta^4(p + k - p' - k') \\ &= \delta(p'^2 - m^2) |_{p'=p+k-k'} \\ &= \delta[(p + k - k')^2 - m^2]\end{aligned}\tag{C.32}$$

となり、導出する事ができる。

C.4 $\overline{X}$ の導出

ここでは、図 C.1 のファイマン図に従って、(2.30) 式を導出する。まず初めに、式を簡単にする為に、

$$\begin{aligned}s &\equiv (p + k)^2 = m_e^2 + 2p \cdot k \\ t &\equiv (k' - k)^2 = -2k \cdot k' \\ u &\equiv (p - k')^2 = m_e^2 - 2p \cdot k'\end{aligned}\tag{C.33}$$

と定義する。この定義によれば、

$$s + t + u = 2m_e^2\tag{C.34}$$

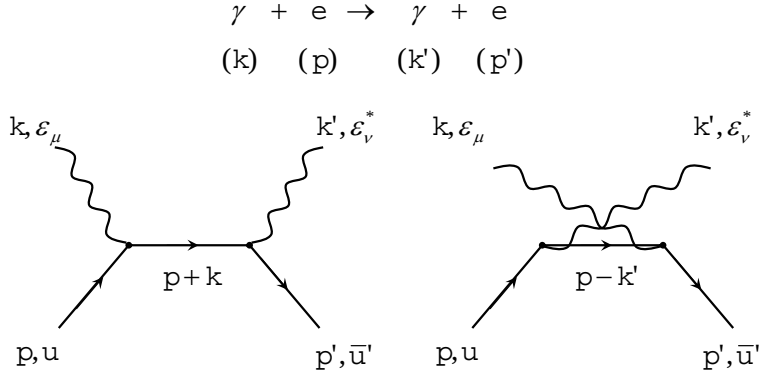


図 C.1: コンプトン散乱における α^2 のファイマン図

が成り立つ。さて、ここから計算に入っていくが、ファイマン図に従うと、散乱振幅 M_{fi} は、

$$M_{fi} = e^2 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \quad (C.35)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= \gamma^\mu \frac{1}{(\not{p} - \not{k}') - m_e} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{1}{(\not{p} + \not{k}) - m_e} \gamma^\mu \\ &= \frac{1}{\not{p} - m_e} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu + \frac{1}{\not{p} + m_e} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \end{aligned} \quad (C.36)$$

である。ここで $\bar{Q}^{\rho\sigma} \equiv \gamma_0 Q^{\rho\sigma\dagger} \gamma_0 = Q^{\sigma\rho}$ である事に注意すると、

$$\begin{aligned} |M_{fi}|^2 &= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} \bar{Q}^{\rho\sigma} u(p', s') \\ &= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} Q^{\sigma\rho} u(p', s') \\ &= e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \text{Tr} \left[u(p, s) \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{(p, s)} Q^{\sigma\rho} \right] \end{aligned} \quad (C.37)$$

となる。次に電子の始状態と終状態においてスピンについて和をとり平均すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{s,s'} |M_{fi}| &= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') \\
&\quad Tr \left[\sum_{s'} u(p', s') \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) \epsilon_\sigma(k', \lambda') \epsilon_\nu^*(k', \lambda') Tr \left[\left(\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left(\frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right]
\end{aligned} \tag{C.38}$$

と変形できる。さて、始状態の光子が偏光していない事を考えると、

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) = -\frac{1}{2} g_{\mu\rho} \tag{C.39}$$

が成り立つ。また、終状態の光子が偏光している場合を考慮すると、(C.38) 式は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{final\ photon} \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |M_{fi}| \\
&= \frac{1}{2} e^4 \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_\mu(k, \lambda) \epsilon_\rho^*(k, \lambda) A_{\sigma\nu} Tr \left[\left(\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left(\frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= \frac{1}{2} e^4 \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\rho} \right) A_{\sigma\nu} Tr \left[\left(\frac{\not{p}' + m_e}{2m_e} \right) Q^{\mu\nu} \left(\frac{\not{p} + m_e}{2m_e} \right) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= -\frac{e^4}{16m_e^2} A^{\sigma\nu} Tr \left[(\not{p}' + m_e) Q^{\mu\nu} (\not{p} + m_e) Q^{\sigma\rho} \right] \\
&= -\frac{e^4}{16m_e^2} A_{\sigma\nu} W^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{C.40}$$

となる。ここで、

$$W \equiv Tr \left[(\not{p}' + m_e) Q^{\mu\nu} (\not{p} + m_e) Q^{\sigma\rho} \right] \tag{C.41}$$

である。今は、終状態も偏光していない場合を考えているので、 $A_{\sigma\nu} = -1/2 g_{\sigma\nu}$ として最後に計算する。また、 W は、

$$W = Tr \left[\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q^{\sigma\rho} \right] + m_e Tr \left[Q^{\mu\nu} \not{p} Q^{\sigma\rho} \right] + m_e Tr \left[\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^{\sigma\rho} \right] + m_e^2 Tr \left[Q^{\mu\nu} Q^{\sigma\rho} \right] \tag{C.42}$$

となる。この計算を各項に分けて以下計算を行う。

$$Tr \left[Q^{\mu\nu} Q^\sigma{}_\mu \right] term$$

$$\begin{aligned}
&= Tr \left[\left\{ \frac{1}{u - m_e^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu + \frac{1}{s - m_e^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \right\} \right. \\
&\quad \left. \left\{ \frac{1}{u - m_e^2} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu + \frac{1}{s - m_e^2} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right\} \right] \\
&= Tr \left[\frac{1}{(u - m_e^2)^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \tag{C.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
first\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[2 (p - k')^2 (\gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\nu) + 4 m_e^2 g^{\nu\sigma} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} 4 \left[4 (p - k')^2 + 4 m_e^2 \right] g^{\nu\sigma} \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} \left\{ (p - k')^2 + m_e^2 \right\} g^{\nu\sigma} \tag{C.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
second\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma + m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[4 (p - k')^\nu (\not{p} - \not{k}) \gamma^\sigma - 2 m_e^2 \gamma^\nu \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p - k')^\nu (p + k)^\sigma + \frac{1}{2} m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \tag{C.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
third\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{ 4 (p - k')^\sigma - 2 m_e \gamma^\sigma \} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[4 (p - k')^\sigma \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) - 2 m_e^2 \gamma^\nu \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ 4 (p - k')^\sigma (p + k)^\nu - 2 m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma - \frac{1}{2} m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \tag{C.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [4\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} 4 \left\{ (p + k)^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\sigma] + m_e^2 \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\sigma] \right\} \\
&= \frac{4}{(s - m_e^2)^2} 4 \left\{ (p + k)^2 g^{\nu\sigma} + m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \\
&= \frac{16}{(s - m_e^2)^2} \left\{ (p + k)^2 + m_e^2 \right\} g^{\nu\sigma} \tag{C.47}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Tr} [Q^{\mu\nu} Q^\sigma{}_\mu]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} \left\{ (p - k')^2 + m_e^2 \right\} g^{\nu\sigma} + \frac{16}{(s - m_e^2)^2} \left\{ (p + k)^2 + m_e^2 \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu - m_e^2 g^{\nu\sigma} \right\} \\
&= \frac{16}{(u - m_e^2)^2} (u + m_e^2) g^{\nu\sigma} + \frac{16}{(s - m_e^2)^2} (s + m_e^2) g^{\nu\sigma} - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \right\} \\
&= 16 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \right\} \tag{C.48}
\end{aligned}$$

$$\text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^\sigma{}_\mu] \text{ term}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left[\frac{1}{(u - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \tag{C.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
first\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu \left\{ m_e \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') + m_e (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma \right\} \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e Tr \left[\not{p}' \left\{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu + \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \right\} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e Tr \left[(-2) \not{p}' \left\{ (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \gamma^\nu + \gamma^\sigma \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \right\} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e (-2) Tr \left[\not{p}' (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \gamma^\nu + \not{p}' \gamma^\sigma \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} m_e (-2) 4 \{ p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} - p'^\sigma (p - k')^\nu + p'^\nu (p - k')^\sigma \\
&\quad + p'^\sigma (p - k')^\nu - p'^\nu (p - k')^\sigma + p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} \} \\
&= \frac{-16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\sigma\nu} \tag{C.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
second\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \{ 4(p - k')^\nu - 2m_e \gamma^\nu \} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[4m_e (p - k')^\nu \not{p}' \gamma^\sigma - 2m_e \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} m_e \\
&\quad \times [4(p - k')^\nu p'^\sigma - 2\{p'^\nu (p + k)^\sigma - p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\sigma (p + k)^\nu\}] \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [2(p - k')^\nu p'^\sigma + p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - \{p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\}] \tag{C.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
third\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \{ 4(p - k')^\sigma - 2m_e \gamma^\sigma \} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[4(p - k')^\sigma \not{p}' \gamma^\nu m_e - 2m_e \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{4m_e (p - k')^\sigma p'^\nu - 2m_e [p'^\nu (p + k)^\sigma - p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\sigma (p + k)^\nu]\} \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [2p'^\nu (p - k')^\sigma + p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - \{p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\}]
\end{aligned} \tag{C.52}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \text{Tr} [4\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} 4m_e \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma + \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \\
&= \frac{8m_e}{(s - m_e^2)^2} 4 [p'^\nu (p + k)^\sigma - p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\sigma (p + k)^\nu] \\
&= \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\} \tag{C.53}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Tr} [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q^\sigma_\mu]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + \frac{8m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [2\{p'^\nu (p - k')^\sigma + p'^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad + 2p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - 2\{p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\}] \\
&\quad + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\} \\
&= -\frac{16m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{-p'^\nu (k + k')^\sigma - p'^\sigma (k + k')^\nu + p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}\} \\
&\quad + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{-p' \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\} \\
&= 16 \left\{ -\frac{m_e}{(u - m_e^2)^2} p' \cdot (p - k') + \frac{m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} p' \cdot (p + k) - \frac{2m_e}{(s - m_e^2)^2} p' \cdot (p + k) \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad - \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{p'^\nu (k + k')^\sigma + p'^\sigma (k + k')^\nu\} + \frac{32m_e}{(s - m_e^2)^2} \{p'^\nu (p + k)^\sigma + p'^\sigma (p + k)^\nu\} \tag{C.54}
\end{aligned}$$

$$Tr \left[Q^{\mu\nu} \not{p} Q^\sigma \right] term$$

$$\begin{aligned}
&= Tr \left[\frac{1}{(u - m_e^2)^2} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
&\quad + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
&\quad \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right]
\end{aligned} \tag{C.55}$$

$$\begin{aligned}
first\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[m_e \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \gamma_\mu + m_e \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} 2m_e Tr \left[\gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} + \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \right. \\
&\quad \left. + (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \right] \\
&= \frac{8m_e}{(u - m_e^2)^2} [(p - k')^\sigma p^\nu - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \\
&\quad + (p - k') p^\sigma + p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad + (p - k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p - k')^\sigma p^\nu + p^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma] \\
&= \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} \}
\end{aligned} \tag{C.56}$$

$$\begin{aligned}
second\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\left\{ -2\not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') + 4m_e p^\nu \right\} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[-2m_e \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma + 4m_e p^\nu (\not{p} + \not{k})^\sigma \right] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} [-2m_e \{ p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
&\quad + 4m_e p^\nu (p + k)^\sigma]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-8m_e}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
&\quad \times \{ -p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p-k')^\sigma + p^\sigma (p-k')^\nu - 2p^\nu (p+k)^\sigma \}
\end{aligned} \tag{C.57}$$

$$\begin{aligned}
\text{third line} &= \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \left\{ -2 (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma \right\} \right] \\
&= \frac{1}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \text{Tr} \left[-2m_e \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \right] \\
&= \frac{4}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \left[-2m_e \{ (p-k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} + (p-k')^\sigma p^\nu \} \right. \\
&\quad \left. + 4m_e (p+k)^\nu p^\sigma \right] \\
&= \frac{-8m_e}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
&\quad \times \{ -p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p-k')^\sigma + p^\sigma (p-k')^\nu - 2p^\sigma (p+k)^\nu \}
\end{aligned} \tag{C.58}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s-m_e^2)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(s-m_e^2)^2} (-2) \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \not{p} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{-2m_e}{(s-m_e^2)^2} \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{-2m_e}{(s-m_e^2)^2} 4 \{ (p+k)^\nu p^\sigma - p^\nu (p+k)^\sigma + p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \\
&\quad + p^\nu (p+k)^\sigma - p^\sigma (p+k)^\nu + p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \} \\
&= -\frac{16m_e}{(s-m_e^2)^2} p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma}
\end{aligned} \tag{C.59}$$

$$\therefore \text{Tr} \left[Q^{\mu\nu} \not{p} Q^\sigma{}_\mu \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32m_e}{(u-m_e^2)^2} \{ p^\nu (p-k')^\sigma + p^\sigma (p-k')^\nu - p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} \} \\
&\quad - \frac{16m_e}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ -p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu - p^\nu (p - k)^\sigma - p^\sigma (p - k)^\nu \} \\
& - \frac{16m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \\
= & \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ -p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
& + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (k + k')^\sigma + p^\sigma (k + k')^\nu \} \\
& - \frac{16m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} \\
= & 16 \left\{ -\frac{2m_e}{(u - m_e^2)^2} p \cdot (p - k') + \frac{m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} p \cdot (p - k') - \frac{m_e}{(s - m_e^2)^2} p \cdot (p + k) \right\} g^{\nu\sigma} \\
& + \frac{32m_e}{(u - m_e^2)^2} \{ p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu \} \\
& + \frac{16m_e}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ p^\nu (k + k')^\sigma + p^\sigma (k + k')^\nu \} \tag{C.60}
\end{aligned}$$

$$Tr \left[\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q^\sigma_\mu \right] term$$

$$\begin{aligned}
= & Tr \left[\frac{1}{(u - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right. \\
& + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \\
& + \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \\
& \left. + \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \tag{C.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
first\ line &= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \left\{ Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \gamma_\mu \right] + m_e^2 Tr \left[\not{p}' \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \gamma_\mu \right] \right\} \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)^2} \left\{ Tr \left[\gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \right] + m_e^2 Tr \left[\gamma_\mu \not{p}' \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \right] \right\} \\
&= \frac{-2}{(u - m_e^2)^2} \left\{ Tr \left[\not{p}' (\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \right] + m_e^2 Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \right] \right\} \\
&= \frac{-2}{(u - m_e^2)^2} \left\{ p' \cdot (p - k') Tr \left[\gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \right] - p'^\nu Tr \left[(\not{p} - \not{k}') \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \right] \right. \\
&\quad \left. + p' \cdot p Tr \left[(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}') \right] - p'^\sigma Tr \left[(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} (\not{p} - \not{k}') \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +p' \cdot (p - k') \text{Tr} \left[(\not{p} - \not{k}') \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \right] + m_e^2 \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \right] \} \\
= & \frac{-8}{(u - m_e^2)^2} \left[2p' \cdot (p - k') \{ p^\mu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu \} \right. \\
& - p'^\nu \{ p \cdot (p - k') (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p - k')^\sigma + (p - k')^2 p^\sigma \} \\
& + p' \cdot p \{ (p - k')^\nu (p - k')^\sigma - (p - k')^\sigma (p - k')^\nu + (p - k')^2 g^{\nu\sigma} \} \\
& - p'^\sigma \{ (p - k')^\nu p \cdot (p - k') - p \cdot (p - k') (p - k')^\nu + (p - k')^2 p^\nu \} \\
& \left. + m_e^2 \{ p'^\nu p^\sigma - p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\sigma p^\nu \} \right] \\
= & \frac{-8}{(u - m_e^2)^2} \left\{ 2p' \cdot (p - k') [-p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\nu (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k')^\nu] \right. \\
& \left. - (p - k')^2 (p'^\nu p^\sigma + p'^\sigma p^\nu - p' \cdot p g^{\nu\sigma}) + m_e^2 (-p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\nu p^\sigma + p'^\sigma p^\nu) \right\} \\
= & \frac{-8}{(u - m_e^2)^2} \left\{ (u - m_e^2) (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^\nu p^\sigma - p'^\sigma p^\nu) \right. \\
& \left. - 2p' \cdot (p - k') [p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p - k')^\sigma - p^\sigma (p - k')^\nu] \right\} \quad (\text{C.62})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{second line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \text{Tr} \left[\not{p}' \{ -2\not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') + 4m_e p^\nu \} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ -2 \text{Tr} \left[\not{p}' \not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] + 4m_e^2 \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\sigma \right] p^\nu \right\} \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left[-2 \left\{ p \cdot p' \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p'^\nu \text{Tr} \left[\not{p} (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p' \cdot (p - k') \text{Tr} \left[\not{p} \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] - p' \cdot (p + k) \text{Tr} \left[\not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p'^\sigma \text{Tr} \left[\not{p} \gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') (\not{p} + \not{k}) \right] \right\} + 4m_e^2 p^\nu \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\sigma \right] \right] \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left[-2 \{ p' \cdot p ((p - k')^\nu (p + k)^\sigma \right. \\
&\quad - (p - k')^\sigma (p + k)^\nu + (p - k') \cdot (p + k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad - p'^\nu (p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma - p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma + p^\sigma (p - k') \cdot (p + k)) \\
&\quad + p' \cdot (p - k') (p^\nu (p + k)^\sigma - p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p + k)^\nu) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) (p^\nu (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + p^\sigma (p - k')^\nu) \\
&\quad + p'^\sigma (p^\nu (p - k') \cdot (p + k) - (p + k)^\nu p \cdot (p - k') \\
&\quad \left. \left. + (p - k')^\nu p \cdot (p + k)) \right\} + 4m_e^2 p^\nu p'^\sigma \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-8}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [p'^\nu \{p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma - (p + k) \cdot (p - k') p^\sigma\} \\
&\quad + p'^\sigma \{p \cdot (p + k) (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') (p + k)^\nu + (p + k) \cdot (p - k') p^\nu\} \\
&\quad + (p' \cdot p) \{(p + k) \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad + p' \cdot (p + k) \{p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p - k')^\sigma - p^\sigma (p - k')^\nu\} \\
&\quad - p' \cdot (p - k') \{p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} - p^\nu (p + k)^\sigma - p^\sigma (p + k)^\nu\} - 2m_e^2 p^\nu p'^\sigma] \\
&\hspace{15em} (C.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{third line} &= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\sigma (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma_\mu \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \left\{ -2 (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} + 4m_e p^\sigma \right\} \right] \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ -2 Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} \right] + 4m_e^2 p^\sigma Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu \right] \right\} \\
&= \frac{1}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ -2 \left[p'^\nu Tr \left[(\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - p' \cdot (p + k) Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \not{p} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p' \cdot (p - k') Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \not{p} \right] - p'^\sigma Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \not{p} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p \cdot p Tr \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} - \not{k}') \gamma^\sigma \right] \right] + 4m_e^2 p^\sigma Tr \left[\not{p}' \gamma^\nu \right] \right\} \\
&= \frac{4}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left[-2 \{ p' \cdot ((p + k) \cdot (p - k')) p^\sigma \right. \\
&\quad \left. - (p + k)^\sigma p \cdot (p - k') + (p - k')^\sigma p \cdot (p + k) \right) \\
&\quad - p' \cdot (p + k) ((p - k')^\nu p^\sigma - p \cdot (p - k') g^{\nu\sigma} + (p - k')^\sigma p^\nu) \\
&\quad + p' \cdot (p - k') ((p + k)^\nu p^\sigma - p \cdot (p + k) g^{\nu\sigma} + (p + k)^\sigma p^\nu) \\
&\quad - p'^\sigma (p \cdot (p - k') (p + k)^\nu - p \cdot (p + k) (p - k')^\nu + (p + k) \cdot (p - k') p^\nu) \\
&\quad + p' \cdot p ((p + k)^\nu (p - k')^\sigma - (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \\
&\quad \left. + (p + k) \cdot (p - k') g^{\nu\sigma}) \right\} + 4m_e^2 p^\sigma p'^\nu] \\
&= \frac{-8}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times [p'^\nu \{p \cdot (p + k) (p - k')^\sigma - p \cdot (p - k') (p + k)^\sigma + (p + k) \cdot (p - k') p^\sigma\} \\
&\quad + p'^\sigma \{p \cdot (p + k) (p - k')^\nu - p \cdot (p - k') (p + k)^\nu - (p + k) \cdot (p - k') p^\nu\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p' \cdot p) \{ (p+k) \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} + (p+k)^\nu (p-k')^\sigma - (p+k)^\sigma (p-k')^\nu \} \\
& + p' \cdot (p+k) \{ p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p-k')^\sigma - p^\sigma (p-k')^\nu \} \\
& - p' \cdot (p-k') \{ p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} - p^\nu (p+k)^\sigma - p^\sigma (p+k)^\nu \} - 2m_e^2 p^\sigma p'^\nu \}
\end{aligned} \tag{C.64}$$

$$\begin{aligned}
\text{fourth line} &= \frac{1}{(s-m_e^2)^2} \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{-2}{(s-m_e^2)^2} \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \not{p} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\sigma \right] \\
&= \frac{-2}{(s-m_e^2)^2} \left\{ \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma \right] + m_e^2 \text{Tr} \left[\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma \right] \right\} \\
&= \frac{-2}{(s-m_e^2)^2} \left\{ p'^\nu \text{Tr} [(\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] - p' \cdot (p+k) \text{Tr} [\gamma^\nu \not{p} (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] \right. \\
&\quad + p' \cdot p \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) (\not{p} + \not{k}) \gamma^\sigma] - p' \cdot (p+k) \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} \gamma^\sigma] \\
&\quad + p'^\sigma \text{Tr} [\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}) \not{p} (\not{p} + \not{k})] + m_e^2 \text{Tr} [\not{p}' \gamma^\nu \not{p} \gamma^\sigma] \left. \right\} \\
&= \frac{-2 \cdot 4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ p'^\nu \left(p \cdot (p+k)^\sigma - p^\sigma (p+k)^2 + p \cdot (p+k) (p+k)^\sigma \right) \right. \\
&\quad - p' \cdot (p+k) (p^\nu (p+k)^\sigma - p^\sigma (p+k)^\nu + p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad + p' \cdot p \left((p+k)^\nu (p+k)^\sigma - (p+k)^\nu (p+k)^\sigma + (p+k)^2 g^{\nu\sigma} \right) \\
&\quad - p' \cdot (p+k) ((p+k)^\nu p^\sigma - (p+k)^\sigma p^\nu + p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma}) \\
&\quad + p'^\sigma \left(p \cdot (p+k) (p+k)^\nu - (p+k)^2 p^\nu + p \cdot (p+k) (p+k)^\nu \right) \\
&\quad + m_e^2 (p'^\nu p^\sigma - p' \cdot p g^{\nu\sigma} + p'^\sigma p^\nu) \left. \right\} \\
&= \frac{-8}{(s-m_e^2)^2} \left[p'^\nu \left\{ 2p \cdot (p+k) (p+k)^\sigma - (p+k)^2 p^\sigma \right\} \right. \\
&\quad + p'^\sigma \left\{ 2p \cdot (p+k) (p+k)^\nu - (p+k)^2 p^\nu \right\} \\
&\quad + (p' \cdot p) (p+k)^2 g^{\nu\sigma} - 2p' \cdot (p+k) p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \\
&\quad \left. - m_e^2 (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^\nu p^\sigma - p'^\sigma p^\nu) \right]
\end{aligned} \tag{C.65}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{Tr} [\not{p} Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\nu] \\
&= \frac{-8}{(u-m_e^2)^2} \left\{ (u-m_e^2) (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^\nu p^\sigma - p'^\sigma p^\nu) \right. \\
&\quad \left. - 2p' \cdot (p-k') [p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p-k')^\sigma - p^\sigma (p-k')^\nu] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{16}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} [p'^\nu \{p \cdot (p+k) (p-k')^\sigma - p \cdot (p-k') (p+k)^\sigma\} \\
& + p'^\sigma \{p \cdot (p+k) (p-k')^\nu - p \cdot (p-k') (p+k)^\nu\} + (p' \cdot p) (p+k) \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} \\
& + p' \cdot (p+k) \{p \cdot (p-k') g^{\nu\sigma} - p^\nu (p-k')^\sigma - p^\sigma (p-k')^\nu\} \\
& - p' \cdot (p-k') \{p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} - p^\nu (p+k)^\sigma - p^\sigma (p+k)^\nu\} - m_e^2 (p^\nu p'^\sigma + p^\sigma p'^\nu)] \\
& -\frac{8}{(s-m_e^2)^2} [p'^\nu \{2p \cdot (p+k) (p+k)^\sigma - (p+k)^2 p^\sigma\} \\
& + p'^\sigma \{2p \cdot (p+k) (p+k)^\nu - (p+k)^2 p^\nu\} \\
& + (p' \cdot p) (p+k)^2 g^{\nu\sigma} - 2p' \cdot (p+k) p \cdot (p+k) g^{\nu\sigma} \\
& - m_e^2 (p' \cdot p g^{\nu\sigma} - p'^\nu p^\sigma - p'^\sigma p^\nu)] \tag{C.66}
\end{aligned}$$

となり、4つの項を計算する事ができる。ここで、

$$\begin{aligned}
p' &= p + k - k' \\
p \cdot k &= \frac{1}{2} (s - m_e^2) \\
p \cdot k' &= -\frac{1}{2} (u - m_e^2) \\
k \cdot k' &= -\frac{1}{2} t = \frac{1}{2} (s + u - m_e^2) \tag{C.67}
\end{aligned}$$

の関係式を用いると、

$$\begin{aligned}
p \cdot p &= (p + k - k') \cdot p = m_e^2 + p \cdot k - p \cdot k' \\
&= m_e^2 + \frac{1}{2} (s - m_e^2) + \frac{1}{2} (u - m_e^2) \\
&= \frac{1}{2} (s + u) \\
p' \cdot (p + k) &= p \cdot (p + k) = \frac{1}{2} (s + m_e^2) \\
p' \cdot (p - k') &= p \cdot (p - k') = \frac{1}{2} (u + m_e^2) \\
(p + k) (p - k') &= m_e^2 \\
p \cdot (k - k') &= \frac{1}{2} (s + u - 2m_e^2) \tag{C.68}
\end{aligned}$$

となり、この式を用いると、 W における各々の項は、

$$W^{\nu\sigma} = Tr [\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] + m_e Tr [Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma] + m_e Tr [\not{p}' Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] + m_e^2 Tr [Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma] \tag{C.69}$$

$$\begin{aligned}
m_e^2 Tr \left[Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma \right] &= \frac{16m_e^2 (u + m_e^2)}{(u - m_e^2)} g^{\nu\sigma} + \frac{16m_e^2 (s + m_e^2)}{(s - m_e^2)} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \left\{ -m_e^2 g^{\nu\sigma} + (p + k)^\nu (p - k')^\sigma + (p + k)^\sigma (p - k')^\nu \right\} \\
&= 16m_e^2 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{ 2p^\nu p^\sigma + (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu) \} \\
m_e Tr \left[\not{p}' Q^{\mu\nu} Q_\mu^\sigma \right] &= -8m_e^2 \left\{ \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)^2} - \frac{s + m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{2(s + m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \{ (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) + 2k^\nu k^\sigma - 2k'^\nu k'^\sigma \} \\
&\quad + \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \\
&\quad \times \{ 2p^\nu p^\sigma + 2(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + 2k^\nu k^\sigma - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu) \} \\
m_e Tr \left[Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma \right] &= -8m_e^2 \left\{ \frac{2(u + m_e^2)}{(u - m_e^2)^2} - \frac{u + m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{s + m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \right\} g^{\nu\sigma} \\
&\quad + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \{ (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) + (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) \} \\
&\quad + \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \{ 2p^\nu p^\sigma - (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) \} \\
Tr \left[\not{p}' Q^{\mu\nu} \not{p} Q_\mu^\sigma \right] &= -\frac{8}{(u - m_e^2)^2} \left[\frac{1}{2} \left\{ (s + u)(u - m_e^2) - (u + m_e^2)^2 \right\} g^{\nu\sigma} + 4m_e^2 p^\nu p^\sigma \right. \\
&\quad \left. - (u - m_e^2)(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) - 2m_e^2 (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) \right] \\
&\quad - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{2} m_e^2 (s + u) g^{\nu\sigma} - 2m_e^2 p^\nu p^\sigma + \frac{1}{2} (s - u - 2m_e^2) (p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (s - u - 2m_e^2) (p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu) - (u + m_e^2) k^\nu k^\sigma + (s + m_e^2) k'^\nu k'^\sigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (s - u) (k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu) \right] \tag{C.70}
\end{aligned}$$

となる。この結果を次の各項についてまとめると、

$(g^{\nu\sigma})$

$$\begin{aligned}
& 16m_e^2 \left\{ \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{s+m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\
& - 8m_e^2 \left\{ \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{s+m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{2(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\
& - 8m_e^2 \left\{ \frac{2(u+m_e^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{u+m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{s+m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\
& - \frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} - \frac{8m_e^2(s+u)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
& - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\
& = -\frac{8m_e^2(u+m_e^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} \\
& - \frac{8m_e^2(s+m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\
& = -\frac{4}{(u-m_e^2)^2} \left\{ 2m_e^2(u+m_e^2) + (s+u)(u-m_e^2) - (u+m_e^2)^2 \right\} \\
& - \frac{4}{(s-m_e^2)^2} \left\{ 2m_e^2(s+m_e^2) + (s+u)(s-m_e^2) - (s+m_e^2)^2 \right\} \\
& = -4(u-m_e^2)(s-m_e^2) \left\{ \frac{1}{(u-m_e^2)^2} + \frac{1}{(s-m_e^2)^2} \right\} \\
& = -4 \left\{ \frac{s-m_e^2}{u-m_e^2} + \frac{u-m_e^2}{s-m_e^2} \right\} \tag{C.71}
\end{aligned}$$

$(p^\nu p^\sigma)$

$$\begin{aligned}
& \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{64m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{64m_e^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)^2} \\
& + \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\
& = \frac{32m_e^2}{(u-m_e^2)^2} + \frac{64m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{32m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \\
& = 32m_e^2 \left(\frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right)^2 \tag{C.72}
\end{aligned}$$

$(p^\nu k^\sigma + p^\sigma k^\nu)$

$$\frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{64m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8(u - m_e^2)}{(u - m_e^2)^2} - \frac{8(s - u - 2m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{8(s + 3m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \\
& = \frac{8(u + 3m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{8(s - 5m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \\
& = 32m_e^2 \left(\frac{1}{u - m_e^2} + \frac{1}{s - m_e^2} \right) \frac{1}{s - m_e^2}
\end{aligned} \tag{C.73}$$

$$(p^\nu k'^\sigma + p^\sigma k'^\nu)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
& - \frac{32m_e^2}{(u - m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)^2} + \frac{8(s - u - 2m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{16m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \\
& = -\frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)^2} + \frac{8(s - u - 4m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{16m_e^2}{(s - m_e^2)^2} \\
& = -16m_e^2 \left(\frac{1}{u - m_e^2} + \frac{1}{s - m_e^2} \right)^2 + \frac{8(s - u)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)}
\end{aligned} \tag{C.74}$$

$$(k^\nu k^\sigma)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{32m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{64m_e^2}{(s - m_e^2)^2} + \frac{16(u + m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{16(s + m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \\
& = \frac{16(u - m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{16(s - 3m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \\
& = \frac{16}{s - m_e^2} - \frac{16(s - 3m_e^2)}{(s - m_e^2)^2} \\
& = \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)}
\end{aligned} \tag{C.75}$$

$$(k'^\nu k'^\sigma)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{32m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{16(s + m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
& = \frac{16}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} (2m_e^2 - s - m_e^2) \\
& = -\frac{16(s - m_e^2)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} \\
& = -\frac{16}{u - m_e^2}
\end{aligned} \tag{C.76}$$

$$(k^\nu k'^\sigma + k^\sigma k'^\nu)$$

$$-\frac{16m_e^2}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} - \frac{32m_e^2}{(s - m_e^2)^2} + \frac{8(s - u)}{(u - m_e^2)(s - m_e^2)} + \frac{8(s + m_e^2)}{(s - m_e^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8(s-u-2m_e^2)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} + \frac{8(s-3m_e^2)}{(s-m_e^2)^2} \\
&= 8 \left\{ \frac{1}{u-m_e^2} - \frac{2m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{2m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{C.77}$$

よって、

$$W^{\alpha\beta} = Ag^{\alpha\beta} + Bp^\alpha p^\beta + C(p^\alpha k^\beta + p^\beta k^\alpha) + D(p^\alpha k'^\beta + p^\beta k'^\alpha) + Ek^\alpha k^\beta + Fk'^\alpha k'^\beta + G(k^\alpha k'^\beta + k'^\beta k'^\alpha) \tag{C.78}$$

$$\begin{aligned}
A &= -4 \left(\frac{s-m_e^2}{u-m_e^2} + \frac{u-m_e^2}{s-m_e^2} \right) \\
B &= 32m_e^2 \left(\frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right)^2 \\
C &= 32m_e^2 \left(\frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right) \frac{1}{s-m_e^2} \\
D &= -16m_e^2 \left(\frac{1}{u-m_e^2} + \frac{1}{s-m_e^2} \right)^2 + \frac{8(s-u)}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} \\
E &= -\frac{16}{m_e^2} (s-m_e^2)^2 \\
F &= -\frac{16}{u-m_e^2} \\
G &= 8 \left\{ \frac{1}{u-m_e^2} - \frac{2m_e^2}{(u-m_e^2)(s-m_e^2)} - \frac{2m_e^2}{(s-m_e^2)^2} \right\}
\end{aligned} \tag{C.79}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{u-m_e^2}{m_e^2} &\equiv x \\
\frac{s-m_e^2}{m_e^2} &\equiv y
\end{aligned} \tag{C.80}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}
A &= -4 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \\
B &= \frac{32}{m_e^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 \\
C &= \frac{32}{m_e^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{1}{y} \\
D &= -\frac{16}{m_e^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{8}{m_e^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{32}{m_e^2} \frac{1}{y^2} \\
F &= -\frac{16}{m_e^2} \frac{1}{x} \\
G &= \frac{8}{m_e^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{xy} - \frac{2}{y^2} \right)
\end{aligned} \tag{C.81}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} W^{\mu\nu} &= 4A + Bm_e^2 + 2C(p \cdot k) + 2D(p \cdot k') + Ek^2 + Fk'^2 + 2G(k \cdot k') \\
&= 4A + Bm_e^2 + 2C(s^2 - m_e^2) - D(u - m_e^2) + G(s + u - 2m_e^2) \\
&= 4A + Bm_e^2 + Cm_e^2 y - Dm_e^2 x + Gm_e^2(x + y) \\
&= -16 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 32 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + 32 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + 16 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 x \\
&\quad - 8 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) x + 8(x + y) \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{xy} - \frac{2}{y^2} \right) \\
&= 32 \left\{ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{C.82}$$

$$= \frac{32}{16m_e} \left\{ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right\} \tag{C.83}$$

が導かれる。ここで、

$$\begin{aligned}
-xm_e^2 &= \kappa \\
-ym_e^2 &= \kappa'
\end{aligned} \tag{C.84}$$

とおくと、 $\overline{X}$ が出てくる事が分かる。

参考文献

- [1] Ya. B. Zel'dvich and R. A. Sunyaev: *Astrophys. Space Sci.*, **4** (1969) 301.
- [2] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dvich: *Astrophys. Space Sci.*, **7** (1970) 3.
- [3] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dvich: *Comments Astrophys. Space Phys.*, **4** (1972) 173.
- [4] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dvich: *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **18** (1980a) 537.
- [5] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dvich: *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **190** (1980b) 413.
- [6] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dvich: *Astrophys. Space Phys. Rev.*, **1** (1981) 1.
- [7] W. Tucker, P. Blanco and S. Rappoport: *Astrophys. J.*, **496** (1998) 5.
- [8] A. Cavaliere, L. Danese, and G. D. Zotti: *Astrophys.*, **J. 217** (1977) 6.
- [9] J. Silk and S. D. M. White: *Astrophys. J.*, **226** (1978) 103.
- [10] A. Cavaliere and R. Fusco-Femiano: *Astron. Astrophys.*, **70** (1978) 677.
- [11] M. Birkinshaw: *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **187** (1979) 847.
- [12] J. E. Carlstrom, G. P. Holder and E. D. Reese: *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **40** (2002) 643
- [13] A. Cavaliere and R. Fusco-Femiano: *Astron. Astrophys.*, **49** (1976) 137.
- [14] I. R. King: *Astrophys. J.*, **174** (1972) 123.
- [15] B. A. Benson, S. E. Church, P. A. R. Ade, J. J. Bock, K. M. Ganga, J. R. Hinderks, P. D. Mauskopf, B. Philhour, M. C. Runyan and K. L. Thompson: *Astrophys. J.*, **592** (2003) 674.

- [16] S. W. Allen and A. C. Fabian: MNRAS, **297** (1998) 57.
- [17] E. D. Reese, J. E. Carlstrom, M. Joy, J. J. Mohr, L. Grego and W. L. Holzappel: Astrophys. J., **581** (2002) 53.
- [18] S. Ettori and A. C. Fabian: MNRAS, **305** (1999) 834.
- [19] J. P. Hughes and M. Birkinshaw: Astrophys. J., **501** (1998) 1.
- [20] M. Donahue: Astrophys. J., **468** (1996) 79.
- [21] G. Gamow: Phys. Rev., **70** (1946) 572.
- [22] R. A. Alpher and R. C. Herman: Phys. Rev., **75** (1949) 1089.
- [23] A. A. Penzias and R. W. Wilson: Astrophys. J., **142** (1965) 419.
- [24] 伊藤 直紀: 「宇宙の時、人間の時」 朝日選書
- [25] M. Birkinshaw: Phys. Rep., **310** (1997) 97.
- [26] J. C. Mather, E. S. Cheng, R. E. Eplee, Jr., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, E. Dwek, S. Gulkis, M. G. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P. M. Lubin, S. H. Moseley, Jr., T. L. Murdock, R. F. Silverberg, G. F. Smoot and D. T. Wilkinson: Astrophys. J., **354** (1990) 37.
- [27] J. C. Mather, E. S. Cheng, D. A. Cottingham, R. E. Eplee, Jr., D. J. Fixsen, T. Hewagama, R. B. Isaacman, K. A. Jensen, S. S. Meyer, P. D. Noerdlinger, S. M. Read, R. P. Rosen, R. A. Shafer, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, M. G. Hauser, T. Kelsall, S. H. Moseley, Jr., R. F. Silverberg, G. F. Smoot, R. Weiss and D. T. Wilkinson: Astrophys. J., **420** (1994) 439.
- [28] C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, D. N. Spergel, G. S. Tucker, E. Wollack, E. L. Wright, C. Barnes, M. R. Greason, R. S. Hill, E. Komatsu, M. R. Nolta, N. Odegard, H. V. Peiris, L. Verde, and J. L. Weiland: Astrophys. J. Supp., **148** (2003) 1.
- [29] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G.

- S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack and E. L. Wright: *Astrophys. J. Supp.*, **148** (2003) 175.
- [30] 伊藤 直紀、須藤 靖、北山 哲: 日本物理学会誌, **59** (2004) 6.
- [31] Y. Rephaeli: *Astrophys. J.*, **496** (1995) 33.
- [32] N. Itoh, Y. Kohyama and S. Nozawa: *Astrophys. J.*, **502** (1998) 7.
- [33] A. Challinor and A. Lasenby: *Astrophys. J.*, **499** (1998) 1.
- [34] G. B. Rybicki and A. P. Lightman: “Radiative Processes in Astrophysics ”(Wiley, 1979) Section 7.6.
- [35] S. J. LaRoque, M. Bonamente, J. E. Carlstrom, M. K. Joy, D. Nagai, E. D. Reese and K. S. Dawson: *Astrophys. J.*, **652** (2006) 917.
- [36] S. Nozawa, N. Itoh Y. Kawana and Y. Kohyama: *Astrophys. J.*, **536** (2000) 31.
- [37] N. Itoh, T. Sakamoto, S. Kusano, Y. Kawana and S. Nozawa: *Astron. Astrophys.*, **382** (2002) 722.
- [38] N. Itoh, K. Kawana, S. Nozawa and Y. Kohyama: *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **327** (2001) 567.
- [39] S. Nozawa, N. Itoh and Y. Kohyama: *Astrophys. J.*, **508** (1998) 17.
- [40] S. Y. Sazonov and R. A. Sunyaev: *Astrophys. J.*, **508** (1998) 1.
- [41] A. Challinor and A. Lasenby: *Astrophys. J.*, **510** (1999) 930.
- [42] M. Shimon and Y. Rephaeli: *New Astron.*, **9** (2004) 69.
- [43] 川名 洋平: 上智大学理工学研究科修士論文 (2001)
- [44] S. Nozawa, N. Itoh, Y. Suda and Y. Ohhata: *Il Nuo. Cim.*, **121** (2006) 5.